Teoria da Computação
Gramáticas, Linguagens Algébricas e Autómatos de Pilha

Simão Melo de Sousa

12 de Outubro de 2011

Conteúdo

1 Gramáticas e Definições básicas

Exercício 1 *Para cada uma das gramáticas G seguintes, (a) descreva a linguagem $\mathcal{L}(G)$ gerada pela gramática considerada, (b) Demonstre a sua afirmação, quando possível, (c) Diga de que tipo (classe) é a gramática:*

1. $$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aS|bA \\ A & \rightarrow & bA|c \end{array}$$

2. $S \rightarrow aaS|aa$

3. $S \rightarrow aaS|a|b$

4. $\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aA \\ A & \rightarrow & bS|a \end{array}$

5. $\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & SA \\ SA & \rightarrow & BS \\ BS & \rightarrow & ab \\ B & \rightarrow & a \\ A & \rightarrow & c \end{array}$

Para esta última gramática, dê duas derivações distintas de aabc □

Exercício 2 *Seja G a gramática seguinte, definida a partir do alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b, i, e, t\}$ e de símbolo inicial S:*

$$\begin{array}{lcl} S & ::= & i\ E\ t\ S\ S' \\ S & ::= & a \\ S' & ::= & e\ S \\ S' & ::= & \epsilon \\ E & ::= & b \end{array}$$

1. *A que clásse pertence a gramática G? Justifique.*
2. *Dê uma árvore de derivação da palavra ibtibtaea*
3. *Será G ambígua? Justifique.*
4. *Dê uma derivação esquerda e uma derivação direita da palavra ibtibtaeaeibtaea*

□

Exercício 3 *Mostre que a gramática G definida pelas produções seguintes:*

$$S \rightarrow SaS \mid aaSa \mid \epsilon$$

é ambígua. □

Exercício 4 (Gramáticas e derivações) *Seja G a gramática definida pelas produções seguintes:*

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A|AC \\ A & \rightarrow & a|b|c \\ C & \rightarrow & AC|BC|A|B \\ B & \rightarrow & 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9 \end{array}$$

1. *Diga, das afirmações seguintes, quais são verdadeiras:*
   (a) $ab037 \in \mathcal{L}(G)$
   (b) $2a3b \in \mathcal{L}(G)$
   (c) $aaaa \in \mathcal{L}(G)$
   (d) $S \Rightarrow a$
   (e) $S \Rightarrow^* ab$
   (f) $BC \Rightarrow 2$
   (g) $BC \Rightarrow^+ 2$
   (h) $C \Rightarrow^* 2abc$
   (i) $C \Rightarrow^5 3b4$
2. *Que linguagem gera a gramática G?*

□

Exercício 5 *Defina uma gramática geradora para cada uma das linguagens seguintes:*

1. $\{a^n b^p | n \geq 1, p \geq 1\}$
2. $\{a^n b^p | n \geq 0, p \geq 3\}$

□

Exercício 6 *Mostre que a linguagem* $\{ab^{2n}cc | n \geq 0\}$ *pertence a classe 3 (classe das linguagens regulares). Defina uma gramática de tipo diferente de 3 que gera esta linguagem.* □

Exercício 7 *Seja G a gramática definida pelas produções seguintes:*

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aC \\
C & \rightarrow & aC|aBC \\
BC & \rightarrow & CB \\
Ba & \rightarrow & aB \\
CB & \rightarrow & Cb \\
bB & \rightarrow & Bb \\
Cb & \rightarrow & b
\end{array}
$$

Qual é a classe da gramática G? Qual é a linguagem gerada por G? Dê uma gramática de classe 2 (algébrica ou livre de contexto) equivalente a G. □

Exercício 8 *Considere a gramática G definida pelas seguintes regras de produção:*

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aA \\ A & \rightarrow & bS|a \end{array}$$

Construa a árvore de derivação da palavra ababaa. □

Exercício 9 *Mostre que a gramática G definida pelas produções seguintes:*

$$S \rightarrow SS|aSb|\epsilon$$

é ambígua. □

Exercício 10 (Gramáticas e derivações) *Seja G a gramática definida pelas produções seguintes:*

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A|AC \\ A & \rightarrow & a|b|c \\ C & \rightarrow & AC|BC|A|B \\ B & \rightarrow & 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9 \end{array}$$

1. *Diga, das afirmações seguintes, quais são verdadeiras:*

   (a) $ab037 \in \mathcal{L}(G)$ Resposta □

Exercício 11 *Demonstre que a gramática* $G = (\{S\}, \{S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \epsilon\}, \{a, b\}, S)$ *é ambígua.* □

2 Gramáticas e Linguagens

Exercício 12 *Dê uma gramática de tipo 1 e outra de tipo 2 que reconheçam a linguagem* $\{a^n b^m c^p | (n \geq 2 * m + p) \wedge (m \geq 0) \wedge (p > 0)\}$ □

Exercício 13 *Defina uma gramática geradora para a linguagem seguinte:*

$\{a^n b^p | n \geq 1, p \geq 1\}$ Resposta □

Exercício 14 *Demonstre, apresentando um contra-exemplo, que não é verdade que qualquer subconjunto duma linguagem regular é regular.*

Resposta □

2.1 Gramáticas e Linguagens Algébricas

Exercício 15 *Mostre que uma linguagem algébrica L sobre um alfabeto Σ pode sempre ser gerada por uma gramática $G = (\Sigma, N, P, S)$ tal que todas as suas produções são da forma $A \rightarrow \alpha$ onde $A \in N$ e $\alpha \in (N^* \cup \Sigma^*)$* □

Exercício 16 *Defina uma gramática livre de contexto que gere a linguagem seguinte $\{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\}$.*

Resposta □

Exercício 17 *Sejam $\Sigma = \{a, b\}$ um alfabeto e G uma gramática regular definida pelas produções seguintes:*

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aA|bD|a|\epsilon \\
A & \rightarrow & aA|b \\
D & \rightarrow & aA|bS
\end{array}
$$

Defina um autómato $\mathcal{A}$ que reconheça a linguagem gerada por G. □

Exercício 18 *Defina uma gramática livre de contexto que gere a linguagem seguinte $\{a^{2n}.b^{3m}.c^{n+2m+1} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.*

□

Exercício 19 *Mostre que as linguagens seguintes são algébricas:*

1. $L_1 = \{a^n b^p | n > p \geq 0\}$
2. $L_2 = \{a^n b^p | (n, p \geq 0) \wedge (n \neq p)\}$
3. $L_3 = \{a^n b^p c^k | (n, k \geq 0) \wedge (p \geq n + k)\}$

□

Exercício 20 *Mostre que a linguagem seguinte é algébrica:*

$$L = \{a^n b^p | n > p \geq 0\}$$

Resposta

Dê a árvore de derivação de w.

Resposta

□

Exercício 21 *Considere a palavra $w = baaba$ e a gramática cujas produções são as seguintes:*

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \mid BC \\ A & \rightarrow & BA \mid a \\ B & \rightarrow & CC \mid b \\ C & \rightarrow & AB \mid a \end{array}$$

Utilize o algoritmo CYK para verificar que a palavra w é reconhecida pela gramática. □

Exercício 22

1. *(Defina uma gramática livre de contexto que gere a linguagem seguinte $\{a^{2n}.b^m.c^{n+2m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.*
2. *Considere a palavra $w = aabbb$ e a gramática cujas as produções são as seguintes:*

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & BB \mid a \\ B & \rightarrow & AB \mid b \end{array}$$

   (a) *Utilize o algoritmo CYK para verificar que a palavra w é reconhecida pela gramática.*

   (b) *Dê a derivação esquerda que comprova o reconhecimento de w.*

3. *Remova as transições ϵ da gramática cujas as produções são as seguintes:*

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & ASB \mid AABS \mid AB \\ A & \rightarrow & \epsilon \mid aA \\ B & \rightarrow & D \\ C & \rightarrow & BB \mid C \\ D & \rightarrow & \epsilon \mid A \mid eD \end{array}$$

□

3 Autómatos de pilhas

Exercício 23 *Defina um autómato com pilha que reconheça as linguagens (Sugestão: define um autómato que utilize Z como símbolo inicial de pilha):*

- $\{a^n.b^m.c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.
- $\{a^n.b^m.c^{n+m+p} \mid n, m, p \in \mathbb{N}\}$.
- $\{a^{2n}.b^m.c^{n+2m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

- $\{a^n.b^{3n+m}.c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ Resposta

$\square$

4 Limites das linguagens Algébricas