Teoria da Computação

Exame - Primeira Chamada

Duração: 2 horas

Universidade da Beira Interior

Quarta-Feira 6 de Fevereiro de 2008

A consulta dos apontamentos manuscritos e os apontamentos da disciplina (**e só esses**) é tolerada.
É proibido o uso de calculadora e de telemóvel.
Qualquer fraude implica reprovação na disciplina.
Só serão corrigidas as provas **legíveis**.

Relembramos que, na tradição da axiomática de Peano, a notação $\mathbb{N}$ refere-se ao conjunto dos naturais incluindo o 0. Referiremo-nos ao conjunto dos naturais sem o 0 ($\{1, 2, 3 \ldots\}$) por $\mathbb{N}^*$.

Os níveis de dificuldade (de A=trivial até D=difícil) presentes em cada alínea são meramente indicativos e tem por objectivo ajudar-vos a planear a resolução.

1 Princípios da Teoria da Computação

(Nível B) Na introdução desta disciplina afirmamos que iríamos definir e estudar os limites do que é possível resolver por computador. Ao longo do semestre concentramo-nos exclusivamente sobre problemas de linguagens, sobre mecanismos geradores e sobre o reconhecimento de linguagens. Explique porque esta discrepância é só aparente, ou seja apresente a relação entre os mecanismos computacionais e as linguagens formais.

2 Técnicas de Demonstração

(Nível B) Demonstre, por contradição, que $2 - \sqrt{2}$ não é racional. Estude por exemplo as contribuições da expressão $(2 - \sqrt{2})^2$ ao raciocínio por contradição pedido.

3 OCaml

Considere o tipo $grafo$ dos grafos dirigidos seguinte:

```
(* tipo grafo onde os nodos são do tipo 'a. O tipo regista as arestas numa lista de adjacência. *)
type 'a grafo = ('a * 'a) list
```

- (Nível B) Defina a função $correcto : {}'a\ grafo \rightarrow bool$ seguinte:

$$correcto\ p\ g\ = \begin{cases} true & \text{se não existe arestas repetidas em g} \\ false & \text{senão} \end{cases}$$

- (Nível D) Defina a função $caminho\_mais\_longo : {}'a\ grafo \rightarrow {}'a \rightarrow {}'a \rightarrow {}'a\ list$ tal que: $caminho\_mais\_longo\ g\ a\ b$ calcula a sequência mais longa de nodos de g sem repetição (i.e. sem ciclos) entre o nodo a e o nodo b do grafo g.

Em ambas as alíneas precedentes, serão beneficiadas as soluções que tiram proveito das particularidades da linguagem OCaml como linguagem funcional com tipos polimórficas e ordem superior.

4 Autómatos Finitos e Linguagens regulares

Nas alíneas seguintes é valorizada a utilização dos algoritmos apresentados na disciplina.

1. (Nível D) Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$,
   (a) Usando o algoritmo que transforme as expressões regulares em autómatos não deterministas com transições ϵ, defina um autómato que reconheça a linguagem $(ab)^2b^*$.
   (b) Remova as transições ϵ.
   (c) Remova os estados inúteis.
   (d) Determinise o autómato resultante.
   (e) Minimise o autómato resultante.
2. (Nível B) Demonstre que a linguagem $\{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

5 Gramáticas

1. (Nível A) Defina uma gramática livre de contexto que gere a linguagem seguinte $\{a^{2n}.b^m.c^{n+2m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.
2. Considere a palavra $w = aabbb$ e a gramática cujas as produções são as seguintes:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & BB \mid a \\ B & \rightarrow & AB \mid b \end{array}$$

   (a) (Nível B) Utilize o algoritmo CYK para verificar que a palavra w é reconhecida pela gramática.
   (b) (Nível A) Dê a derivação esquerda que comprova o reconhecimento de w.
3. (Nível B) Remova as transições ϵ da gramática cujas as produções são as seguintes:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & ASB \mid AABS \mid AB \\ A & \rightarrow & \epsilon \mid aA \\ B & \rightarrow & D \\ C & \rightarrow & BB \mid C \\ D & \rightarrow & \epsilon \mid A \mid eD \end{array}$$

6 Autómatos de pilha

(Nível B) Defina um autómato com pilha que reconheça a linguagem $\{a^{2n}.b^m.c^{n+2m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Sugestão: define um autómato que utilize Z como símbolo inicial de pilha.

7 Máquinas de Turing

(Nível C) Defina uma máquina de Turing que dado dois inteiros em entrada (em codificação unária, separados na fita por um símbolo branco) termine com sucesso se e só se os dois inteiros são iguais.