Teoria da Computação

Frequência

Universidade da Beira Interior

Quarta-Feira 24 de Janeiro de 2006 das 9h00 às 11h00 - sala 6.02

> A consulta dos apontamentos da disciplina (**e só esses**) é tolerada.
> Proibido o uso de calculadora e de telemóvel.
> Qualquer fraude implica reprovação na disciplina.
> Só serão corrigidas as provas **legíveis**.

Relembramos que, na tradição da axiomática de Peano, a notação $\mathbb{N}$ refere-se ao conjunto dos naturais incluindo o 0. Referiremo-nos ao conjunto dos naturais sem o 0 por $\mathbb{N}^*$.

1. Seja R uma pre-ordem. Mostre que a relação $R^{\#}$, definida como $x\ R^{\#}\ y \triangleq (x = y) \vee ((x\ R\ y) \wedge (y\ \overline{R}\ x))$ (onde $\overline{R}$ designa a relação complementar de R), é uma relação de ordem larga.

2. Seja $\mathbb{D}$ o conjunto das funções parciais de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$. Seja fun a função recursiva de $\mathbb{D}$ definida por

$$\begin{aligned} fun \triangleq [f \in \mathbb{D} |\ & f(0) = 0,\ f(1) = 5, \\ & f(2 \times n) = 2 \times f(n) + 5 \\ & f(2 \times n + 1) = 2\,n \times f(2\,n)] \end{aligned}$$

   (a) Defina o operador de ponto fixo $F_{fun}\ f\ x$ associado à função fun.
   (b) Calcule fun_0, fun_1, fun_2, fun_3 e fun_4.

3. Admitindo que as operações aritméticas usuais terminam, demonstre que a seguinte função OCaml termine para todo o inteiro natural parâmetro:

```
let rec f n =  if n<=0 then 0
               else if (n mod 2=0)  then  2*(f (n/2)) + 5
                    else (n-1) * f (n-1)
```

4. Considere o conjunto AB_A das árvores binárias de elementos do conjunto A (que contempla a árvore vazia). Considere igualmente as funções n e h calculando respectivamente o número de nodos e a altura da árvore em parâmetro. Demonstre por indução que $\forall x \in AB_A n(x) \leq 2^{h(x)} - 1$.

5. O problema da paragem questiona se existe um método algorítmico que possa estabelecer sem falha se qualquer programa que lhe for fornecido como parâmetro termina ou não. Foi demonstrado que tal método não pode existir. No entanto foi introduzido nesta disciplina um método baseado no princípio da indução bem fundada que permite demonstrar a terminação. Comente e resolve este aparente paradoxo.

6. Usando o sistema numérico de Church,
   (a) Diga que termo t codifica a expressão 2×3
   (b) Calcule a forma normal de t.