Teoria da Computação

Exame - Segunda Chamada

Universidade da Beira Interior

Segunda-Feira 20 de Fevereiro de 2006 das 9h30 às 12h00

A consulta dos apontamentos da disciplina (**e só esses**) é tolerada.
Proibido o uso de calculadora e de telemóvel.
Qualquer fraude implica reprovação na disciplina.
Só serão corrigidas as provas **legíveis**.

Relembramos que, na tradição da axiomática de Peano, a notação $\mathbb{N}$ refere-se ao conjunto dos naturais incluindo o 0. Referiremo-nos ao conjunto dos naturais sem o 0 por $\mathbb{N}^*$.

1. Sejam A um conjunto e AB_A o conjunto das árvores binárias (eventualmente vazias) de elementos de A. A relação R de *sub-árvore* define-se da seguinte forma: sejam a e b duas árvores de AB_A, a é sub-árvore de b se $a = b$ ou quando existe um nodo n de b de que a é filho (esquerdo ou direito). Veja por exemplo a figura 1 onde a árvore C é sub-árvore de B e B é sub-árvore de A. Note que a árvore vazia denotada na figura por *empty* é sub-árvore de qualquer árvore.

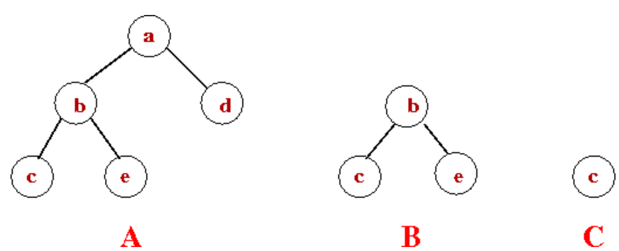

Figura 1: Árvores e Sub-árvores

Sabemos que a relação R é uma ordem larga. Mostre que o conjunto ordenado (AB_A, R) forma um reticulado.

2. Seja $\mathbb{D}$ o conjunto das funções parciais de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$. Seja fun a função recursiva de $\mathbb{D}$ definida por

$$fun \triangleq [f \in \mathbb{D}|\ \ f(0) = 3,\ f(1) = 3,\ f(2) = 1,\ f(n+3) = 2 \times f(n) + 5\ ]$$

(a) Defina o operador de ponto fixo $F_{fun}\ f\ x$ associado à função fun.
(b) Calcule fun_0, fun_1, fun_2, fun_3 e fun_4.

3. Demonstre por indução estrutural que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$.

4. Considere a seguinte função OCaml:

```
let rec misterio n =
 if n <= 0 then 0
 else  if (n mod 2)=0
       then 2 * (misterio (n/2))
       else misterio (n-1) + 1
```

   (a) Admite que as funções aritméticas usuais terminam. Demonstre que a função *misterio* termina.

   (b) Demonstre por indução bem fundada sobre n que $\forall n \in \mathbb{N}, misterio\ n = n$

5. Uma técnica popular para a demonstração de indecidibilidade de problemas, a *técnica da redução*, consiste em exibir uma transformação do problema estudado para um problema conhecido por ser indecidível.

   Se encontrar uma solução para um problema A pode se transformar na (ou pode equivaler numa) procura duma solução para o um problema B, então se B não tem solução algorítmica de certeza que A também não tem. O problema A é assim igualmente indecidível.

   Neste contexto, é importante que a referida transformação seja ela própria decidível (tem de existir um algoritmo que a efectue).

   Diga porque esta última condição é essencial. Sugestão: digo por exemplo o que aconteceria (em termos de conclusão por tirar sobre o problema A) se a transformção não pudesse ser um algoritmo.

6. No lambda cálculo,

   (a) define um lambda termo que represente a disjunção;

   (b) define um lambda termo que represente a função $f : x \mapsto 3 \times (x - 1)$;

   (c) usando o sistema numérico de Church, calcule a forma normal de $(f\ 2)$.