Teoria da Computação

Exame

Universidade da Beira Interior

Segunda-Feira 6 de Fevereiro de 2006 das 9h30 às 12h00 - sala 6.05

A consulta dos apontamentos da disciplina (**e só esses**) é tolerada.
Proibido o uso de calculadora e de telemóvel.
Qualquer fraude implica reprovação na disciplina.
Só serão corrigidas as provas **legíveis**.

Relembramos que, na tradição da axiomática de Peano, a notação $\mathbb{N}$ refere-se ao conjunto dos naturais incluindo o 0. Referiremo-nos ao conjunto dos naturais sem o 0 por $\mathbb{N}^*$.

1. Sejam A um conjunto e AB_A o conjunto das árvores binárias (eventualmente vazias) de elementos de A. A relação R de *sub-árvore* define-se da seguinte forma: sejam a e b duas árvores de AB_A, a é sub-árvore de b quando (1)existe um nodo n de b de que a é filho (esquerdo ou direito) (2) a é b. Veja por exemplo a figura seguinte onde a árvore C é sub-árvore de B e B é sub-árvore de A.

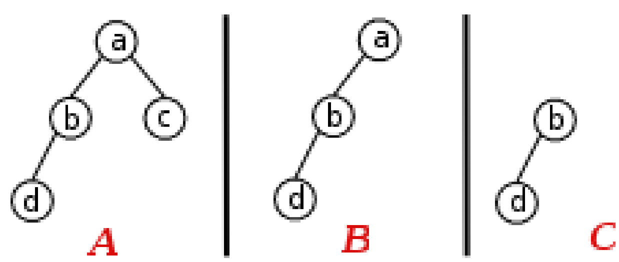

Figura 1: Árvores e Sub-árvores

Mostre que a relação R é uma relação de ordem larga.

2. Seja $\mathbb{D}$ o conjunto das funções parciais de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$. Seja fun a função recursiva de $\mathbb{D}$ definida por

$$fun \triangleq [f \in \mathbb{D}| \;\; f(0) = 2, \;\; f(1) = 3, \;\; f(n+2) = n \times f(n) + 5 \;]$$

(a) Defina o operador de ponto fixo $F_{fun}\ f\ x$ associado à função fun.
(b) Calcule fun_0, fun_1, fun_2, fun_3 e fun_4.

3. Considere as seguintes funções OCaml:

```
let rec remove_elemento e l =
 match l with
   [] ->  []
 | el::li -> if (el=e)
             then remove_elemento li
             else el::(remove_elemento li)


let rec remove_duplicados l =
  match l with
    [] -> []
  | el::li ->
         let new_l = remove_elemento el li in
           el::(remove_duplicados new_l)
```

Admita neste exercício que todas as operações aqui utilizadas, com a excepção de *remove_elemento* e de *remove_duplicados*, terminam.

(a) Indique porque podemos afirmar sem dúvida que *remove_elemento* termina?

(b) Sabendo que *length l* calcula o comprimento da lista l demonstre, por indução estrutural sobre a lista l, que $\forall l \in\ ('a\ list)\ \forall e \in A,\ length\ (remove\_elemento\ e\ l) \leq length\ l.$

(c) Utilizando a propriedade estabelecida no ponto anterior, demonstre, por indução bem fundada que a função *remove_duplicados* termina.

Sugestões: As listas são definidas por indução estrutural pelo conjunto base $\{[\,]\}$ (um só elemento de base, a lista vazia) e pelo único construtor :: que, de um elemento e e de uma lista l constroi uma nova lista $e :: l$. Deste facto podem deduzir a resposta ao primeiro ponto e induzir o princípio de indução associado que poderá ser utilizado na resolução do segundo ponto.

4. Usando o sistema numérico de Church,

   (a) Diga que termo t codifica a expressão $2 + 3$.

   (b) Calcule a forma normal de t.

   (c) Define um lambda termo que represente a função $f : x \mapsto 2 \times (x + 1)$.