Teoria da Computação

Exame - Segunda Chamada

Duração: 2 horas

Universidade da Beira Interior

Quarta-Feira 13 de Fevereiro de 2008

A consulta dos apontamentos manuscritos e os apontamentos da disciplina (**e só esses**) é tolerada.
É proibido o uso de calculadora e de telemóvel.
Qualquer fraude implica reprovação na disciplina.
Só serão corrigidas as provas **legíveis**.

Relembramos que, na tradição da axiomática de Peano, a notação $\mathbb{N}$ utilizada neste documento refere-se ao conjunto dos naturais incluindo o 0. Referiremo-nos ao conjunto dos naturais sem o 0 ($\{1, 2, 3 \ldots\}$) por $\mathbb{N}^*$.

Os níveis de dificuldade (de A=trivial até D=difícil) presentes em cada alínea são meramente indicativos e tem por objectivo ajudar-vos a planear a resolução.

1 Princípios da Teoria da Computação

(Nível B) O problema da paragem é indecidível, no entanto sabemos decidir (demonstrar) se os peudocódigos seguintes: `while (true) i++;` e `while (i>0) i--;` terminam ou não (de facto o primeiro não termina o segundo sim). Outra exemplo é sabermos demonstrar mecanicamente que qualquer recursão estrutural termina. Explique esta aparente contradição.

2 Técnicas de Demonstração

(Nível B) Vamos aqui considerar o conjunto $\mathbb{N}^*$ (os naturais sem o 0). Considere a seguinte sequência de somas:

$$\frac{1}{1\times 2};\quad \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3};\quad \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4};\quad \ldots$$

- Calcule as somas do exemplo e apresente um padrão geral para esta sequência de somas.
- Demonstre **por indução estrutural** a conjectura apresentada na alínea anterior.

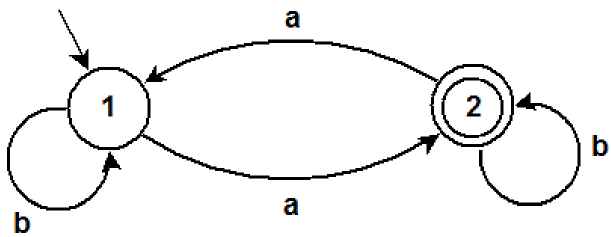

Figura 1: Autómato A_1

3 OCaml

Considere o tipo $grafo$ dos grafos dirigidos seguinte:

```
(* tipo grafo onde os nodos são do tipo 'a. O tipo regista as arestas numa lista de adjacência. *)
type 'a grafo = ('a * 'a) list
```

(Nível C) Defina a função $ciclo : \ 'a\ grafo \rightarrow bool$ seguinte:

$$ciclo\ g\ = \begin{cases} true & \text{se existe um ciclo em g} \\ false & \text{senão} \end{cases}$$

4 Autómatos Finitos e Linguagens regulares

1. (Nivel B) Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, dê um autómato finito **determinista** que reconheça a linguagem $\{w_1abaw_2 \mid w_1 \in \Sigma^*, w_2 \in \Sigma^*, |w_1| \geq 3, |w_2| \leq 5\}$
2. Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ e o autómato A_1 da figura 1.
   (a) (Nível D) Considere as *derivações completas* (derivações que começam no estado inicial e que terminam no estado final, também designados por *caminhos bem sucedidos*).
      i. Define por indução o conjunto das derivações completas do autómato A_1.
      Dica: Antes de mais, todas as derivações completas devem ser consideradas pelo conjunto.
         A. Determine qual é a menor derivação completa possível em A_1? Está será o caso de base.
         B. Como se constrói uma derivação completa a partir de outra? Deduza assim o caso indutivo.
      Repare que o conjunto das etiquetas das derivações completas formam o conjunto das palavras aceites pelo autómato A_1.
      ii. Qual é o princípio de indução associado à definição indutiva anterior?
      iii. Para uma palavra p, $|p|_a$ representa o número de a's em p. Demonstre por indução sobre as derivações completas que $\forall p \in L(A_1), |p|_a$ é impar.
   (b) (Nível B) Utilize o algoritmo de MacNaughton e Yamada para calcular a expressão regular correspondente ao autómato A_1. Para este efeito deverá preencher a tabela seguinte

	$K=1$	$K=2$
$R(1,1,K)$		
$R(1,2,K)$		
$R(2,1,K)$		
$R(2,2,K)$		

3. (Nível B) Demonstre que a linguagem $\{a^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

5 Gramáticas

1. (Nível A) Demonstre que a gramática $G = (\{S\}, \{S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \epsilon\}, \{a, b\}, S)$ é ambígua.
2. (Nível B) Considere a palavra $w = baaba$ e a gramática cujas produções são as seguintes:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \mid BC \\ A & \rightarrow & BA \mid a \\ B & \rightarrow & CC \mid b \\ C & \rightarrow & AB \mid a \end{array}$$

   Utilize o algoritmo CYK para verificar que a palavra w é reconhecida pela gramática.

3. (Nível D) Simplifique (i.e. remover produções ϵ, produções unitárias e inúteis) a gramática cujas as produções são as seguintes:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & cASB \mid cAB \\ A & \rightarrow & \epsilon \mid aA \\ B & \rightarrow & D \\ C & \rightarrow & BB \mid C \\ D & \rightarrow & \epsilon \mid eBD \end{array}$$

6 Autómatos de pilha

(Nível B) Defina um autómato com pilha que reconheça a linguagem $\{a^{2n}.b^{3m}.c^{n+2m+1} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Sugestão: define um autómato que utilize Z como símbolo inicial de pilha.

7 Máquinas de Turing

(Nível C) Defina uma máquina de Turing que dados dois inteiros em entrada a e b (em codificação unária, separados na fita por um símbolo branco) termine com sucesso se e só se $a < b$.