Teoria da Computação

Exame

Universidade da Beira Interior

Sexta-Feira 21 de Janeiro de 2005 das 14h30 às 17h30 - sala 6.06

A consulta dos apontamentos da disciplina (**e só esses**) é tolerada.
Proibido o uso de calculadora e de telemóvel.
Qualquer fraude implica reprovação na disciplina.
Só serão corrigidas as provas **legíveis**.

Relembramos que, na tradição da axiomática de Peano, a notação $\mathbb{N}$ refere-se ao conjunto dos naturais incluindo o 0. Referiremo-nos ao conjunto dos naturais sem o 0 por $\mathbb{N}^*$.

1 Conjuntos, Relações, Ordens e Conjuntos Ordenados, Reticulados e CPOs

Sejam A o conjunto $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\mid$ $(\subseteq \mathbb{N}^2)$ a relação de divisibilidade ($a \mid b \triangleq$ *a divide b*). Admita que $(A, |)$ é um conjunto ordenado (i.e. a relação $|$ é uma ordem larga sobre A). Demonstre ou refute as seguintes afirmações:

1. $(A, |)$ é um conjunto totalmente ordenado;
2. $(A, |)$ é um reticulado.

2 Pontos Fixos

Seja $\mathbb{D}$ o conjunto das funções parciais de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$. Seja fun a função recursiva de $\mathbb{D}$ definida por

$$
\begin{aligned}
fun \triangleq [f \in \mathbb{D} \mid\ & f(0) = 1, \\
& f(1) = 0, \\
& f(n+2) = 2 \times f(n)]
\end{aligned}
$$

1. Defina o operador de ponto fixo $F_{fun}\ f\ x$ associado à função fun.
2. Calcule fun_0, fun_1, fun_2, fun_3 e fun_4.

3 Indução Estrutural

1. Defina de forma indutiva o conjunto bin_A das árvores binárias *não vazias* de elementos dum conjunto A. Por árvores não vazias, entendemos que as mais pequenas árvores deste conjunto são folhas (árvores com um só elemento do conjunto A);
2. Dê o princípio de indução associada a esta definição indutiva;
3. Defina a função $arestas$ que calcula o número de vértice da árvore em parâmetro;
4. Defina a função $nodos$ que calcula o número de nodos da árvore em parâmetro;
5. Demonstre que $\forall x \in bin_A, nodos(x) = arestas(a) + 1$.

4 Dedução Natural

Demonstre, em dedução natural, a seguinte tautologia: $((P \wedge R) \vee (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge R)$

5 Cálculo λ

Dê a forma normal do seguinte $\lambda-$termo: $(\lambda u.(\lambda y.x\ y)u)(x((\lambda z.z\ z)(\lambda t.t)))$;

6 OCaml

Imagine um país em que as cidades podem ser representadas por mapas como o da figura 1. Cada um dos pontos representa um cruzamento, e cada seta uma estrada com sentido único. Uma cidade é assim sempre

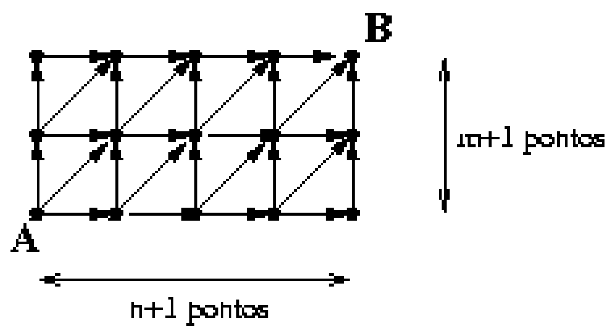

Figura 1: Mapa da cidade

rectangular com n estradas de comprimentos e m estradas de largura. Tendo em conta os sentidos únicos, só me posso deslocar para a direita para cima e na diagonal nordeste. Imagine agora que pretenda caminhar do ponto A para o ponto B. Quantos caminhos possíveis tenho? Para responder a tal pergunta, escreva a função OCaml *caminhos* que, dado n e m calcule o número de alternativas possíveis para a pretendida caminhada.

Sugestão: Considere os valores para os casos seguintes: $(caminhos\ 0\ m)$, $(caminhos\ n\ 0)$ e $(caminhos\ (n+1)\ (m+1))$. Deduza uma função recursiva.

7 Coq

A luz da teoria da computação e da expressividade algorítmica das linguagens de programação, diga qual é a diferença entre o cálculo λ puro (como o da secção 5) e o cálculo λ com tipos subjacente ao sistema Coq (o cálculo das construções indutivas). Como sugestão de resposta, qualifica as funções definíveis no sistema Coq comparativamente com as funções definíveis no cálculo λ puro.

8 Validação do primeiro trabalho prático

Só necessita responder a duas das perguntas seguintes (uma por cada problema efectivamente resolvido no primeiro trabalho).

Sunny Mountains: Explique que modificações terá de fazer ao seu programa para considerar a seguinte modificação ao enunciado:

> " (...) uma paisagem não é só uma sequência de pico e de vales, existe a possibilidade de existirem planaltos. (...)"

No more prerequisites! please: É assumido no enunciado original que os dados de entrada formam uma ordem estrita. Explique que modificações terá de levar o programa para que seja verificada explicitamente esta propriedade?

Integer sequences: Imagine que ao invés do d-ésimo inteiro, queiramos mostrar o $(2 \times d)$-ésimo inteiro. Indique que alterações terá de implementar na sua solução ao problema original.

RPN calculator: Desta vês pretende implementar uma calculadora prefixa (+ 1 2 para a soma de 1 com 2). O que consegue reaproveitar da sua solução?