Lógica Computacional

LEI, 2014/2015
DI-UBI

Aula Prática 19

Semântica da Lógica de Primeira Ordem

Considere a assinatura $\Sigma = (SF, SP)$ onde:

- $SF_0 = \{zero\},\ SF_1 = \{suc\},\ SF_2 = \{\oplus, \otimes\}$ e;
- $SP_1 = \{par, impar\},\ SP_2 = \{Eq, Leq\}$.

Considere também a estrutura de interpretação $\mathsf{Nat} = (\mathbb{N}_0, I)$, sendo:

- $I(zero) = 0$;
- $I(suc) :\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $I(suc)(n) = n + 1$;
- $I(\oplus) :\ \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ tal que $I(\oplus)(n, m) = n + m$;
- $I(\otimes) :\ \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ tal que $I(\otimes)(n, m) = n \times m$;
- $I(par) :\ \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ tal que $I(par)(n) = 1$ se $\exists k\, (n = 2 \times k)$ e $I(par)(n) = 0$ caso contrário;
- $I(impar) :\ \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ tal que $I(impar)(n) = 1$ se para algum $k \in \mathbb{N}_0$ se tem $n = 2 \times k + 1$ e $I(impar)(n) = 0$ caso contrário;
- $I(Eq) :\ \mathbb{N}_0^2 \to \{0, 1\}$ tal que $I(Eq)(n, m) = 1$ se $n = m$ e $I(Eq)(n, m) = 0$ caso contrário;
- $I(Leq) :\ \mathbb{N}_0^2 \to \{0, 1\}$ tal que $I(Leq)(n, m) = 1$ se $n \leq m$ e $I(Leq)(n, m) = 0$ caso contrário.

Assuma a atribuição $\rho :\ X \to \mathbb{N}_0$ tal que $\rho(n) = 3$ e $\rho(m) = 2$.

1. Determine a interpretação dos seguintes termos em Nat.

   (a) $[\![zero]\!]^{\rho}_{\mathsf{Nat}}$
   (b) $[\![n]\!]^{\rho}_{\mathsf{Nat}}$
   (c) $[\![suc(n)]\!]^{\rho}_{\mathsf{Nat}}$
   (d) $[\![\oplus(suc(zero), m)]\!]^{\rho}_{\mathsf{Nat}}$
   (e) $[\![\otimes(\oplus(m, suc(n)), \oplus(suc(zero), m))]\!]^{\rho}_{\mathsf{Nat}}$

2. Determine se são verdadeiras as afirmações seguintes.

   (a) $\mathsf{Nat}, \rho \Vdash Leq(zero, n)$;
   (b) $\mathsf{Nat}, \rho \Vdash Leq(m, \oplus(suc(zero), m))$;
   (c) $\mathsf{Nat}, \rho \Vdash Eq(n, m) \land Leq(n, suc(n))$;
   (d) $\mathsf{Nat}, \rho \Vdash par(n) \to impar(n)$;
   (e) $\mathsf{Nat}, \rho \Vdash \exists n\, impar(suc(n))$;
   (f) $\mathsf{Nat}, \rho \Vdash \exists n\, Eq(suc(n), zero)$;
   (g) $\mathsf{Nat}, \rho \Vdash \forall n\, Eq(suc(n), m)$;
   (h) $\mathsf{Nat}, \rho \Vdash \forall n\, \neg Eq(suc(n), zero)$.