

Lógica Computacional

Aula 0 - Contexto e História

António Ravara Simão Melo de Sousa

O que é a lógica?

etimologia ao socorro da definição

a literatura e a história dão-nos várias, na verdade inúmeras, definições possíveis do conceito de lógica

lógica

ló.gi.ca • 'lɔʒikɐ

nome feminino

1. disciplina normativa, tradicionalmente vinculada à filosofia, que se propõe determinar as condições da verdade nos diferentes domínios do saber
2. análise e teoria do pensamento válido; estudo e determinação dos modos de pensamento discursivo que permitem evitar as contradições e os erros
3. obra ou compêndio que sistematiza tal disciplina, teoria ou estudo
4. encadeamento regular ou coerente das ideias e das coisas; coerência; método

lógica bivalente

lógica que apenas conhece dois valores: o verdadeiro e o não verdadeiro

lógicas plurivalentes/polivalentes

lógicas que reconhecem mais de dois valores, habitualmente três: o verdadeiro, o falso e o indeterminado



Do grego *logiké* [tékhnē], «a arte de raciocinar», pelo latim *logica*, «lógica»

lógica | s. f.
fem. sing. de **lógico**

ló-gi-ca

substantivo feminino

1. Ciência de raciocinar.
2. Livro que trata dessa ciência.
3. [Figurado] Coerência.
4. [Popular] Palavrado.

Palavras relacionadas: [lógico](#), [apofântica](#), [logicismo](#), [logicamente](#), [lógico](#), [discursivo](#), [antepredicamental](#).

ló-gi-co

(grego *logikós*, -ê, -ón, relativo à palavra, ao discurso, hábil a falar, relativo ao raciocínio)
adjectivo

1. Conforme as regras da lógica.
 2. Coerente.
 3. Diz-se da análise que estuda as proposições e seus membros componentes.
- substantivo masculino*
4. Aquele que é versado em lógica.
 5. [Popular] Indivíduo manhoso, finório.

(dicionários online)

a literatura e a história dão-nos várias, na verdade inúmeras, definições possíveis do conceito de lógica

Lógica. *s.f. disciplina normativa, tradicionalmente vinculada à filosofia, que se propõe determinar as condições da verdade nos diferentes domínios do saber; análise e teoria do pensamento válido; estudo e determinação dos modos de pensamento discursivo que permitem evitar as contradições e os erros; obra ou compêndio que sistematiza tal disciplina, teoria ou estudo; encadeamento regular ou coerente de ideias e das coisas; coerência; método; ...*

(Dicionário da Língua Portuguesa, Porto Editora)

a literatura e a história dão-nos várias, na verdade inúmeras, definições possíveis do conceito de lógica

LÓGICA — FILOS. 1) *O termo* — a) A palavra L. corresponde ao gr. λογική (ἐπιστήμη) e significa, etimologicamente, «ciência do lógos», i. é, ciência da palavra ou ciência do pensamento. No uso corrente, prevaleceu o segundo significado — ciência do pensamento —, mas mesmo esta expressão pode ser tomada em muitos sentidos, tornando-se por isso necessário precisar com mais exactidão em qual deles se toma, ao definir a L. (cf. infra 3). b) Aristóteles não usou a palavra L.; o equivalente mais próximo deste tempo, no Estagirita, é «analítica». Crisipo dividiu a filos. em L., ética e física. Para os Estóicos (segundo Diógenes Laércio), a L. compreende a Retórica e a Dialéctica (cf. Arnim, *Stoicorum veterum fragmenta*, n.º 42

e 48). Pelo contrário, em Cícero, Alexandre de Afrodísia e Boécio o termo L. parece designar, unicamente, a dialéctica dos Estóicos. Nos começos da Escolástica e no séc. XVI (Melancton, Ramus, Fonseca), o termo mais usado é Dialéctica; na Escolástica dos sécs. XIII-XV e XVII e ss., predomina o termo L. 2) *História*: A) *Filosofias orientais* — a) Os Chineses dedicaram-se sobretudo a investigações de L. linguística, à exactidão das expressões (em ligação com Confúcio) e regras da arte de disputar. A. Forke (*Geschichte der alten chinesischen Philosophie*, Hamburgo, 1927, 405-427) nomeia os «dialécticos» Têng Hsi-Tse (m. 501 a. C.) e Tin Wên-Tse (séc. IV a. C.). Outros, como Rui Schi (séc. IV a. C.), elaboraram uma arte sofis-

(Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura, Verbo)

concentremo-nos sobre a origem etimológica do termo que vem do *Grego Antigo*

LOGOS

Verbo, Palavra... lógica como a disciplina e a arte do verbo certo
assim historicamente começou

houve escolas lógicas chinesa (sexto século AC), índia (várias, de 500 AC até ao século XVII)

mas foi a escola da **Grécia Antiga** que realmente estabeleceu as raízes da lógica como a conhecemos e praticamos

a **Aristóteles** é atribuída consensualmente a paternidade desta disciplina embora ela hoje tenha evoluído muito da proposta original e que outros ilustres gregos moldaram também significativamente a lógica na sua compreensão inicial

.... mas devolvemos a Aristóteles o que é de Aristóteles!

historicamente a lógica nasceu como sub-disciplina da filosofia e estudava **os mecanismos do discurso autêntico** que transmitia a verdade e que consolidava novas verdades

era designada de **dialéctica** (Aristóteles preferia designá-la de **analítica**) muito antes de se designar por **lógica**

diferenciava-se da **retórica**

dialéctica: estudo do discurso da verdade

vs

retórica: a arte da persuasão e da eloquência

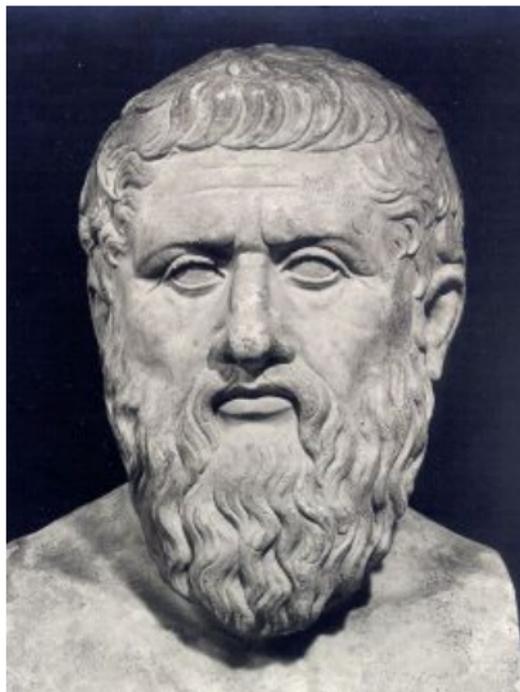
do verbo, do debate... do confronto racional e ético de ideias nasce a verdade!

introduzido por Zenão de Eleia, Platão fortaleceu com algum rigor o argumento que hoje conhecemos como **redução ao absurdo** (RAA - **Reductio Ad Absurdum**)

Platão exemplificava este método com debates idealizados com Sócrates, o seu mentor e professor

Sócrates apresentava o seu argumento, Platão discursava racionalmente que este argumento levava a uma situação impossível, ambos concordavam então que o argumento original só podia ser falso

$$A \rightarrow \perp, \text{ logo } \neg A$$

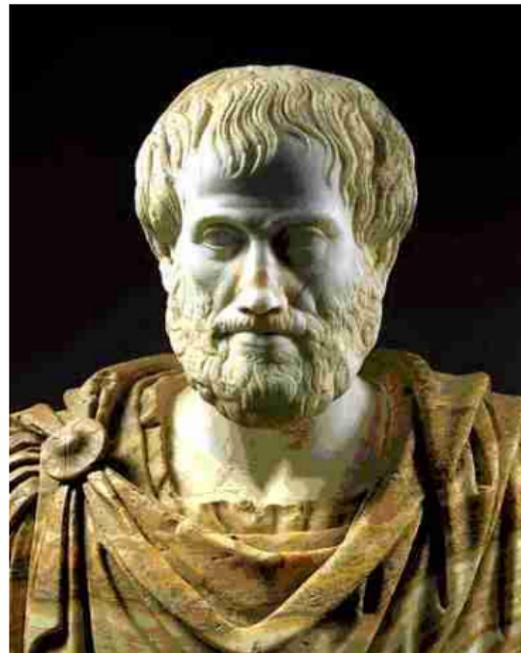


Platão (427-347 AC)

Aristóteles, aluno de Platão, fundador do Liceu, elevou a dialética para um patamar inédito:

criticava a dialética do seu professor pelo seu excesso empírico, a sua permissibilidade aos excessos da retórica (sofismos, falácias) e pela necessidade de um certo consentimento e boa vontade de ambas as partes para o apuro da verdade.

Aristóteles entendia que a **argumentação deveria valer por si!**



Aristóteles (384-322 AC)

é preciso estabelecer um **método sistemático e rigoroso** para permitir que se estabeleça a verdade a partir de verdades prévias

e que este método seja rigoroso para que se sustente a si próprio

silogismo

a obra prima da lógica até ao século XIX da nossa era!

curiosamente (ou não...) foi no século XIX que a Lógica ficou irremediavelmente ligada à matemática

dizia Aristóteles sobre as demonstrações (silogismos no seu tempo)

Posso não conseguir demonstrar um determinado resultado, mas se me apresentar uma argumentação saberei sem dúvida se esta demonstra o seu propósito

- as **demonstrações valem por si!**
- é mais fácil **verificar uma demonstração** (que resulta de um processo objectivo simples) do que **construí-la!**

mais umas notas sobre o contributo da escola aristotélica

Aristóteles em **Tópicos** reflecte sobre a noção de causa/consequência, que conheceremos mais tarde como a implicação

Para estabelecer uma tese, procura uma proposição cuja verdade implica a da tese: então se se mostra que a proposição é verdade, então teremos demonstrado a validade da tese. Para refuta-la, basta encontrar uma proposição de que seja consequência: então se mostramos que esta consequência é falsa teremos demonstrado que a tese é falsa.

$A \rightarrow B, A$ então B

$A \rightarrow B, \neg B$ então $\neg A$

em **Primeiros Analíticos**

De premissas verdadeiras não podemos obter conclusões falsas, mas de premissas falsas podemos encontrar uma conclusão verdadeira

mais umas notas sobre o contributo da escola aristotélica

mas também

uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

ou ainda o **princípio do terço excluído**

uma proposição ou é verdadeira ou é falsa

$$A \vee \neg A$$

Theophrastus, aluno de Aristóteles, explicitou duas **regras de inferência** bem conhecidas em lógica

(**modus ponens**) se $A \rightarrow B$ e A então B

(**modus tollens**) se $A \rightarrow B$ e $\neg B$ então $\neg A$

a retórica, resumidamente, trata da **eloquência** e da **persuasão**, de **vencer debates**, não necessariamente do discurso fatualmente verdade

no contexto do discurso científico, o Aristóteles rapidamente percebeu que os seus silogismos deveriam ser imunes aos excessos da retórica (p.ex falácias, sofismos)

mas não só: paradoxos, ambiguidades linguísticas ...

strawman

Misrepresenting someone's argument to make it easier to attack.

After Will said that we should put more money into health and education, Warren responded by saying that he was surprised that Will had an account to which he wants to leave \$100 million by cutting military spending.

slippery slope

Asserting that if we allow A to happen, then Z will consequently happen too, therefore A should not happen.

Colin Cloost asserts that if we allow same-sex couples to marry, then the next thing we know we'll be allowing people to marry their pets, their cars and even monkeys.

special pleading

Moving the goalposts to create exceptions when a claim is shown to be false.

Edward Zizek claimed to be psychic, but when his abilities were tested under proper scientific conditions, they magically disappeared. Edward explained this saying that one had to have faith in his abilities for them to work.

the gambler's fallacy

Believing that 'runs' occur to statistically independent phenomena such as roulette wheel spins.

Red had come up six times in a row on the roulette wheel, so Greg knew that it was close to coming that black would be next up. Suffering an economic form of natural selection with this thinking, he soon lost all of his savings.

black-or-white

Where two alternative states are presented as the only possibilities, when in fact more possibilities exist.

While talking support for his plan to fundamentally undermine citizens' rights, the Supreme Justice told the people they were either on his side, or on the side of the enemy.

false cause

Presuming that a real or perceived relationship between things means that one is the cause of the other.

Heading to a fancy chart, Roger shows how temperatures have been rising over the past few centuries, whilst at the same time the numbers of plagues have been decreasing. That proves cool the world and global warming is a hoax.

ad hominem

Attacking your opponent's character or personal traits in an attempt to undermine their argument.

After Sally presents an eloquent and compelling case for a more equitable taxation system, Sam asks the audience whether we should believe anything from a woman who isn't married, was once arrested, and smokes a bit weed.

loaded question

Asking a question that has an assumption built into it so that it can't be answered without agreeing guilty.

Grace and Helen were both nonparanormally interested in Brexit. One day, with food sitting under their noses, Grace asked in an inquisitive tone whether Helen was having any problems with a viral infection.



appeal to emotion

Manipulating an emotional response in place of a valid or compelling argument.

Luke didn't want to eat his sheep's brains with chopped liver and Brussels sprouts, but his father said he'd let him try them if he ate the peas. Slaving children in a third-world country who weren't fortunate enough to have any food at all.

tu quoque

Avoiding having to engage with criticism by turning it back on the accuser—answering criticism with criticism.

The blue candidate accused the red candidate of committing the tu quoque fallacy. The red candidate responded by accusing the blue candidate of the same, after which around an hour of back and forth criticism with no reach progress.

burden of proof

Saying that the burden of proof lies not with the person making the claim, but with someone else to disprove.

Bob said that the Burgeon at the very moment, in orbit around the Sun between the Earth and Mars, and that because no one can prove from his claim is therefore a valid one.

no true scotsman

Making what could be called an appeal to purity as a way to dismiss relevant criticisms or flaws of an argument.

Angus declares that Scotsman do not put sugar on their porridge, to which Ianachus points out that he is a Scotsman and puts sugar on his porridge. Furzuss, like a true Scot, Angus yells that no true Scotsman suggests his porridge.

the texas sharpshooter

Cherry-picking data clusters to suit an argument, or finding a pattern to fit a presumption.

The makers of SuperCandy Candy point to research showing that 60% of the five countries where SuperCandy is most popular eat less than 10% of their time on the top ten healthiest countries in Asia, therefore SuperCandy is healthy.

the fallacy fallacy

Presuming that because a claim has been poorly argued, or a fallacy has been made, that it is necessarily wrong.

Recognizing that Amanda had committed a fallacy in arguing that we should eat healthy food because a nutritionist said it was popular, Alyse said we should therefore eat bacon double cheeseburgers every day.

personal incredulity

Saying that because one finds something difficult to understand that it's therefore not true.

She drew a picture of a fish and a human and with effusive disdain declared the fishy thought we were stupid enough to believe that a fish somehow turned into a human though just, like, random things happening over time.

ambiguity

Using double meanings or ambiguities of language to mislead or misrepresent the truth.

When the judge asked the defendant why he hadn't said his parking fines, he said that he shouldn't have to pay them because the sign said 'Free for parking here' and he so naturally presumed that it would be fine to park there.

genetic

Judging something good or bad on the basis of where it comes from, or from whom it comes.

Accused on the 6 o'clock news of corruption and taking bribes, the senator said that we should all be very wary of the things we hear on the media, because we all know how very unreliable the media can be.

middle ground

Saying that a compromise, or middle point, between two extremes is the truth.

Henry said that vaccinations caused autism in children, but her scientifically well-read friend Clark said that this claim had been debunked and proven false. Her friend Alice, on the other hand, said that vaccinations cause some autism.

How shall not commit logical fallacies

A logical fallacy is a flaw in reasoning. Strong arguments are void of logical fallacies, while arguments that are weak tend to use logical fallacies to appear stronger than they are. They're like tricks or illusions of thought, and they're often very sneakily used by politicians, the media, and others to fool people. Don't be fooled. This poster has been designed to help you identify some of the more common fallacies. If you see someone committing a logical fallacy online, let them know through the relevant fallacy to school them in their minds. yourlogicalfallacyis.com/stawman

 This poster is published under a Creative Commons No Derivatives Public Domain 2022 by Jess Beetham. You are free to print, copy, and redistribute this artwork, with the branding removed, that you reproduce it in full but that others may share it. This poster can be downloaded for free of the website.

Free, printable vector version available at yourlogicalfallacyis.com

os sofistas eram considerados mestres da retórica e da oratória, acreditavam que **a verdade é múltipla, relativa e mutável**

alguns sofistas estudavam assim que formas da retórica permitiam **ganhar argumentos**, a custo eventualmente da desonestidade intelectual mas sempre **sob a aparência da validade argumentativa**

um sofismo famoso:

Um sofista jurista é processado pela sua Escola por este ter concluído o curso e não ter pago as devidas propinas. Este argumenta que ele deveria ganhar o processo porque, se perder é porque a Escola falhou na sua formação, logo não merece que ele pague as propinas. A Escola argumenta que ele deve perder, já que se ele ganhar então ele foi devidamente formado e logo deveria ter pago por isso.

(reza a história que de facto *Protagoras*, o mais famosos dos sofistas, processou o seu aluno *Euathlus* nestas condições)

Nota Bene: que a lógica vos proteja deles!

Lógica Grega

Os Silogismos de Aristóteles

os silogismos são uma lógica dos termos

Aristóteles percebeu que na construção de um argumento composto, as palavras e os seus significados só são relevantes na aplicação

Sócrates é mortal Sócrates é um homem **X é Y**

a essência do argumento mantém-se¹

interessou-se assim nas formas de compor o que se chama de **proposições categóricas**

¹usou o conceito de variável muito antes de François Viète que o introduziu na matemática no século XVI.

(quantificador)	sujeito	ligação	predicado
-----------------	---------	---------	-----------

exemplos: Alguns gregos são homens, Nenhum gato é animal voador,
Alguns carros não são eternos, Todos os seres vivos são mortais

há 4 tipos de proposições categóricas:

as afirmações universais (Todo o homem é mortal),

as afirmações particulares (Alguns homens são ruivos),

as negações universais (Nenhum homem é imortal),

as negações particulares (Alguns homens não são gregos)

inferência imediata e a teoria dos silogismos

Aristóteles e os seus seguidores estabeleceram as condições em que de uma proposição categórica se poderia inferir uma nova (**inferências imediatas**)

ex: Nenhum homem é imortal \implies Nenhuma coisa imortal é homem
Todos os homens são mortais \implies Sócrates é mortal

ou, de forma mais ambiciosa, que formas de associação de duas proposições categóricas (designadas de premissas) válidas permitam **descobrir** uma terceira (sub-entendida **nova**) proposição categórica válida

é a **teoria do silogismo, a silogística**

um silogismo é um discurso no qual, certas coisas sendo asseguradas, qualquer outra coisa surge necessariamente pela simples existência prévia destas coisas
(Aristóteles)

um argumento para a verdade que vale por si

consideremos as duas proposições categóricas

(A) Todos os homens são mortais

(B) Todos os gregos são homens

diz-se de “mortal” que é termo maior, “grego” termo menor e “homem” termo médio

diz-se de (A) que é a premissa maior e de (B) que é a premissa menor

conforme a natureza das duas premissas (negações universais, etc...), serem maior ou menor, se os termos maiores (... menores, médios) estarem no predicado ou no sujeito então é possível deduzir uma terceira

de toda combinatória associada, os estudiosos dos silogismos extraíram um conjunto de associações conclusivas: **porque nem todas as associações resultam!**

Aqui, um clássico: **Todos os gregos são mortais**

Todo Médio é Maior
Todo o Menor é Médio
 \implies Todo o Menor é Maior

Nenhum Médio é Maior
Todo o Menor é Médio
 \implies Nenhum Menor é Maior

Todo Médio é Maior
Alguns Menor é Médio
 \implies Algum Menor é Maior

Nenhum Médio é Maior
Alguns Menor é Médio
 \implies Alguns Menor não é Maior

obviamente, se não respeitamos as regras



**Logic: another thing that
penguins aren't very good at.**

citemos aqui somente alguns deles

- o raciocínio por desenvolver nem sempre segue a estrutura de um silogismo
- Aristóteles (e restante escola ao longo da história) não conseguiu estabelecer com rigor porque algumas combinações eram conclusivas e outras não
por exemplo Aristóteles não capturou bem o conceito de quantificador

ora, a luz de hoje, percebe-se que a teoria de conjunto elementar (estabelecida muito, muito mais tarde) sustenta a silogística

e que uma teoria do pensamento científico deve ir além deste enquadramento elementar

- os silogismos não são imunes aos paradoxos

Branco é uma cor

Sócrates é branco

Logo, Sócrates é uma cor.

⇒ **a língua natural não é propícia ao rigor argumentativo**

infelizmente, se é possível corrigir formalismos lógicos para evitar alguns paradoxos, veremos que alguns deles não são evitáveis por estes meios

os conceitos/termos alvo dos silogismos são simples

não é possível capturar **relações** subtis ou complexas com silogismos

por exemplo como expressar facilmente que se X é avó de Y então Y é neto de X e assim retirar proveito destes factos nas argumentações silogísticas?

embora Aristóteles seja contemporâneo do Euclides, o uso dos silogismos ficou confinado na dialéctica/filosofia como um instrumento argumentativo da metafísica, cara ao Aristóteles

não houve impacto profundo na demonstração em matemática

antes pelo contrário, a evolução da matemática no seu renascimento (século XVII e XVIII) pareceu reforçar o fosso entre o pensamento silogístico e o pensamento matemático

as reflexões de **Gottfried Wilhelm Leibniz** e mais tarde a necessidade de uma notação formal/simbólica para a expressão da matemática pareceu abrir o caminho para uma reformulação e reestruturação do pensamento lógico como instrumento do pensamento científico

Lógica Grega

As escolas Megárica e Estoíca

a escola megárica e na sequência a escola estoíca deram um riquíssimo contributo à lógica, em grande parte complementar à escola aristotélica

surpreendentemente a história lhes foi ingrata e o contributo à lógica destas escolas ficou no limbo do esquecimento até ao século XX

onde finalmente foi dado o devido destaque à força das suas descobertas e à sua riqueza conceptual

Łukasiewicz, grande lógico da escola polaca do século XX dizia desta escola:

Os bons lógicos raciocinavam há dois mil anos da mesma forma como nós o fazemos hoje

a escola da cidade de Mégara, fundada por um discípulo de Sócrate (logo, anterior ao de Aristóteles) preocupava-se em perceber os mecanismos necessários para refutar dadas afirmações

neste sentido, aproxima-se da família da lógica proposicional

mas também se afirmou como uma escola que estudou paradoxos (proposições que não se podem nem refutar nem validar)

à diferença dos sofismos, esta escola considerava os paradoxos como ameaças sérias à consistência dos mecanismos do pensamento

“Esta frase é falsa”

Epimênides o cretence:
“Todos os Cretenses são
mentirosos compulsivos”

Sharon to Sylvester:
“I am not a woman you can
trust”



numa cidade onde trabalha um único barbeiro, todos os homens devem apresentar-se barbeados. Segue-se a regra de que os que não se barbeiam sozinhos usam o serviço do barbeiro. Quem barbeia o barbeiro?

numa turma de lógica, o professor avisa: “para a semana, há teste surpresa. Não digo quando, mas no dia em que o fizer, ficarão surpresos!”
os alunos deduziram logo, sexta não pode ser, porque na quinta ao fim do dia ficamos a saber. Mas então, também não pode ser na quinta feira, porque na quarta a noite, acaba-se a surpresa. Mas então não pode ser também na quarta, porque na terça a noite ficamos a saber. Terça, segunda idem... O teste teve lugar na terça, e os alunos foram surpreendidos.

deve-se ao Fílon, aluno de Diodoro, da escola megárica a primeira referência às tabelas de verdade

usou-as implicitamente, numa contenda com o mentor, para justificar a sua definição rigorosa da implicação

Fílon dizia que a implicação é verdade quando não começa pela verdade para terminar com o falso, por forma que para a implicação há três formas de ser verdadeira e uma só de ser falsa

muito antes do Boole!

Diodoro entendia a implicação como uma conectiva que expressava a causalidade explícita, a necessidade ou ainda a temporalidade

dia chuvoso \rightarrow chão molhado

inscrevia-se assim numa clara visão dialéctica clássica, enquanto Fílon defendia a implicação como sendo a expressão de uma implicação condicional

o Ouro é um metal \rightarrow a área do círculo é $\Pi.r^2$

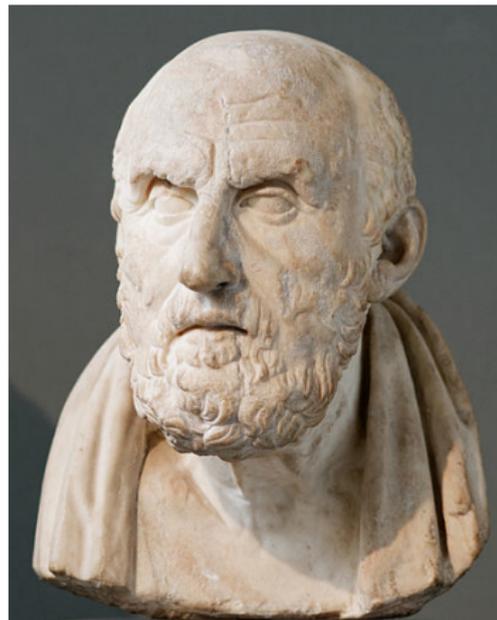
é essa interpretação que se faz em lógica contemporânea

antecipa-se da interpretação de Fílon que este seguiu uma visão formalista e que entendia as conectivas como funções de verdade!

fundada pelo Zenão de Cítio (336-265 AC), a dialéctica da escola estoíca teve em Crísipo de Solos (Solos, c. 280 a.C. Atenas, ca. 208 a.C.) o seu pensador máximo

inscrevam-se na sequência da escola megárica, e contribuíram a uma visão **formalista** da dialéctica na perspectiva de uma **lógica das proposições** assente em **conectivas lógicas** bem estudadas

distinguiam numa afirmação/proposição, a **sintaxe da semântica** (significante, significado)



Crísipo de Solos

a formalização lógica da escola estoíca

as proposições são construções organizadas por conectivas (**algumas familiares, outras não**) e por proposições atômicas (positivas ou negativas, sem distinção particular)

um exemplo da visão formalista estoíca: a negação de “é dia” não é “é noite” na dialéctica estoíca, mas sim **não - “é dia”**

esta caracterização permite considerar naturalmente duplas negações e identificá-las como anuladoras $\neg\neg P \equiv P$

de uma forma geral separação **semântica/sintaxe** e o **tratamento formalista** permitiu a escola estoíca estabelecer leis lógicas e redescobrir algumas que só dois mil anos mais tarde se re-discutiria

algumas leis lógicas da escola estoíca

numa formulação *moderna*

algumas leis de base

$$(MP) ((P \rightarrow Q) \wedge P) \vdash Q$$

alguns teoremas lógicos que se deduziram

$$(MT) ((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \vdash \neg P$$

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \wedge \neg Q) \vdash R$$

$$(\neg(P \wedge Q) \wedge P) \vdash \neg Q$$

$$((P \wedge Q \rightarrow R) \wedge (\neg R \wedge P)) \vdash Q$$

$$((P \underline{\vee} Q) \wedge P) \vdash \neg Q$$

$$\neg\neg P \equiv P$$

$$((P \underline{\vee} Q) \wedge \neg Q) \vdash P$$

Do renascimento à revolução na Lógica

não houve revoluções na lógica desde as escolas da Grécia Antiga e durante quase dois mil anos

embora tenha havido avanços pontuais e alguns episódios anedóticos que o espaço aqui nos impede abordar com detalhe

assinalamos aqui somente alguns anúncios que prefiguraram o que viria ser a revolução na lógica (séculos XIX e XX) e a sua associação, finalmente, à matemática e à ciência do pensamento científico

destacamos dos detractores da dialéctica o Descartes que não apoiava o seu papel central no pensamento científico

com a sua **Geometria Analítica**, e o seu **Discours de la Méthode**, Descartes via **nas** matemáticas a base da criação e da justificação dos saberes matemáticos²

a dialéctica é aqui uma mera ferramenta para a expressão mas não o invólucro da criação do saber

era claro que, para o Descartes, a lógica é um saber externo à matemática, **formalista, mecânico e estéril** e é na matemática que está o centro do processo criativo em ciências

a história reconciliará esta posição com a lógica

²Descartes considerava a geometria analítica como uma técnica para a geometria euclidiana e não uma teoria na qual toda a geometria euclidiana se podia expressar

Blaise Pascal e mais notoriamente o **Gottfried Wilhelm Leibniz** anteviram uma reformulação da lógica de acordo com o lugar que lhe era pedido na matemática, padecendo em parte da maturidade do conhecimento matemático para esta transformação ocorrer das mãos deles

Pascal percebeu e formulou desejo de uma lógica devidamente axiomatizada como uma alternativa à geometria euclidiana

Leibniz tentou (sem total sucesso) dar um modelo matemático (baseado em argumentos próprios da teoria dos conjuntos) à silogística, de onde destacamos as conectivas da conjunção, disjunção e negação

deu por exemplo uma definição rigorosa da igualdade que ainda perdura como referência, a igualdade de Leibniz:

$$\forall P, \forall x, y. P(x) = P(y) \iff x = y$$

foi também mais longe que o Pascal na sua visão do que poderia e deveria ser a lógica no edifício da matemática:³

o **calculus ratiocinator** como o motor lógico e mecânico da construção matemático

³a lógica do século XX será fatal a este projecto

Do renascimento à revolução na Lógica

o Século XIX

da necessidade de assentar e fundamentar a matemática

os séculos XVII, XVIII e XIX foram extraordinários no que diz respeito ao crescimento do conhecimento matemático

foi uma corrida desenfreada para a frente e os eventuais **ajustes** sentidos (como lidar, por exemplo, com o problema do logaritmo de números negativos, etc.) **foram adiados**

o impacto da descoberta de geometrias não euclidianas no século XIX foi também notório: a geometria euclidiana fundamento de aparência inabalável da matemática perdia o seu estatuto
mas então que outras axiomáticas? como as axiomáticas se comparam? como repensar os conjuntos, (dos naturais, dos reais em particular), a análise sobre estes conjuntos ...

outro argumento interessante foi o da necessidade e do aparecimento do ensino “em massa” da elite intelectual! é necessário reformular os textos de ensino científicos de forma coerente para ensinar bem e a todos!

George Boole (Reino Unido, 1815 - 1864) : **álgebra de Boole**

em 1847 o lógico publica **“The mathematical Analysis of logic”** e em 1854 **“The Laws of Thought”** onde define os operadores lógicos baseados nos valores 0 (que significa falso) e 1 (verdade): os famosos operadores booleanos

Boole define assim que o modelo (o **significado**) para a lógica proposicional é uma álgebra devidamente definida e axiomatizada: **álgebra de Boole**

e que uma fórmula proposicional tem por semântica uma função (booleana) sobre esta álgebra



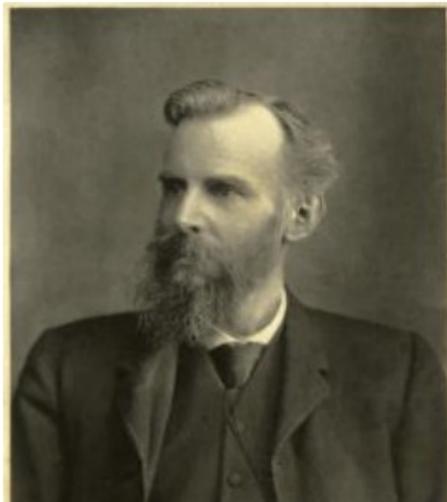
anecdoticamente a disjunção retoma o seu papel central em relação a disjunção exclusiva (assenta melhor na axiomática proposta)

extensões e modelos gráficos da Álgebra de Boole

Jonh Venn (UK, 1834-1923), Charles Lutwidge Dodgson (a.k.a Lewis Carroll, UK, 1832-1898)

foram outros grandes lógicos do século XIX que, entre outros, estenderam o trabalho do C. Boole

são autores dos diagramas muito cómodos que habitualmente usamos para representar graficamente os conceitos lógicos



AR & SMDS



LC - Aula 0

da fundação da lógica proposicional à da lógica predicativa

Augustus De Morgan (UK, 1806-1871)

estabeleceu uma teoria das relações que permitiria assentar os trabalhos lógicos seguintes

é obviamente o autor das famosas leis de De Morgan que já conhecem

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$$



da fundação da lógica proposicional à da lógica predicativa

citamos também Charles Sanders Peirce (UK, 1839-1914)

que deu sequência ao trabalho de De Morgan, em particular destacou o papel dos **quantificadores** (\exists , \forall) como os conhecemos e que estarão também no centro do trabalho de Frege.

foi também o autor de uma lei (de Peirce) que surpreendentemente é equivalente a lei do terço excluído!

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$



a lógica no centro da reformulação da matemática

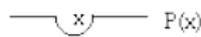
Gottlob Frege (Alemanha 1848 - 1925) : **a lógica predicativa e os seus quantificadores**

fundamentou noção de quantificadores da qual segue a Lógica de Primeira Ordem

inventou a Lógica de Segunda Ordem

essa permitiu o tratamento rigoroso das noções de funções e variáveis, tendo formalizado a aritmética

a lógica torna-se irremediavelmente **formal e simbólica**

	for	$P \Rightarrow Q$
	for	$\neg P$
	for	$\forall x P(x)$
	for	$\vdash P$



Do renascimento à revolução na Lógica

o Século XX

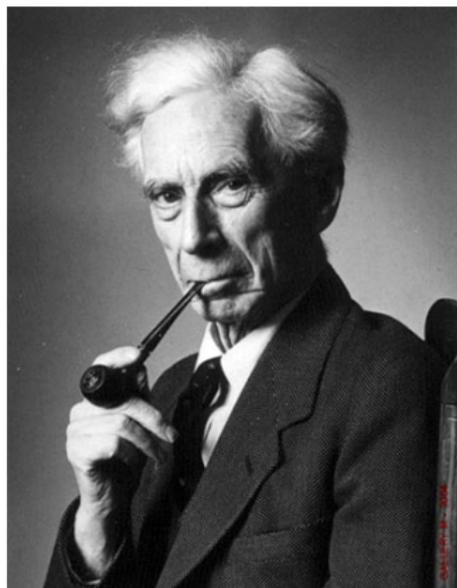
Bertrand Russell (Reino Unido, 1872 - 1970)

Bertrand Russel estudou os fundamentos da Matemática, em particular como o Frege a formalizava e descobriu um paradoxo (poucos dias antes de Frege querer publicar a obra dele)

o conjunto M de todos os conjuntos que não se contém a si próprio, contém-se a si próprio?

$$M = \{A \mid A \notin A\}$$

analise por caso: se sim.... não se não... sim...

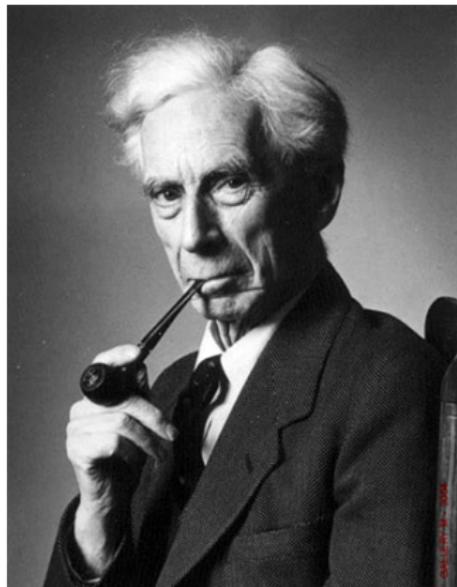




Bertrand Russell (Reino Unido, 1872 - 1970)
na sequência....

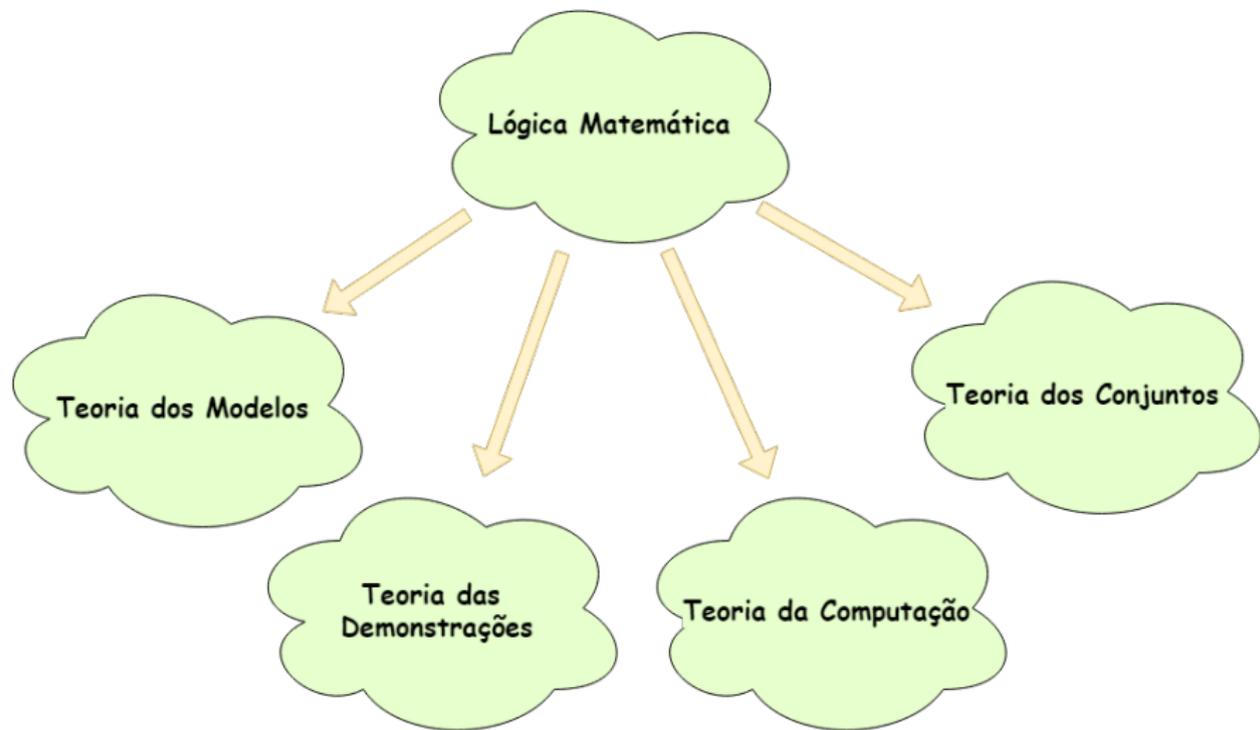
escreveu, **Principia Mathematica** (com Alfred North Whitehead), 3 vols. uma **obra prima**

ali descreve como a matemática pode ser reduzida (i.e. fundamentada) a um conjunto pequeno de princípios fundamentais



continuaremos este relato na aula de Teoria da Computação!

(onde mostraremos como de um desastre nasceu algo de bom)



resumidamente, a lógica como o fundamento do conhecimento matemático propõe uma linguagem formal para expressar conceitos, termos e relações sobre estes, assim como sintaxe para combinar, compor etc. mas então estruturar o conhecimento matemático?

- uma axiomática/uma teoria T : um conjunto de fórmulas lógicas que representam o que se entende ser o conhecimento de base
- uma interpretação dos símbolos da teoria (**do significante para o significado**) que dá **semântica** à teoria proposta⁴
- a noção de **consequência semântica** \models

$$T \models F$$

significa que tendo em conta a interpretação definida para T e que se assume a **validade/satisfação** de todos os elementos de T , F é **válida/satisfeita**

⁴já sabemos que em lógica proposicional, esta interpretação fundamenta-se na Álgebra de Boole

neste contexto, a noção de verdade confunde-se com o conceito de validade/satisfação

visão em camada do conhecimento matemático: uma matemática explica-se por outra etc.

a verdade/validade descobre-se por projecção ao significado, a lógica é somente um artifício linguístico

Teoria dos modelos: o estudo algébrico do conceito de interpretação, validade etc.

destaca-se Alfred Tarki (Polaco, 1901-1983) como figura tutelar da teoria dos modelos.



na lógica, uma abordagem alternativa consiste em extrair a noção de verdade pela própria forma das frases por analisar

por exemplo, se tem uma prova de $\forall x \in A, P(x) \rightarrow Q(x)$ e se também tem uma prova de $P(a)$ para um a particular do conjunto A , então é natural que se consiga demonstrar $Q(a)$.

aqui, no lugar de validade, fala-se de **desmonstrabilidade** (\vdash)

$$\forall x, P(x) \rightarrow Q(x) \vdash Q(a)$$

um enunciado é demonstrado porque existe um traço escrito (por regras bem definidas) que permite interligar a demonstrabilidade do enunciado a factos comprovadamente provados

enquadra-se na tradição da **silogística!**

destaca-se o Gerhard Gentzen (DE, 1909-1945), figura de proa da teoria da demonstração



uma das grandes questões nas diferentes lógicas que se consegue definir é se a relação \models se confunde com \vdash

é uma questão fundamental da lógica (e da matemática....)

$$\models \equiv \vdash?$$

é **falso no caso geral**, mas verdade nalguns casos notáveis (o desta UC!)

assim, neste contexto desta UC assumiremos a definição da lógica como

lógica: a ciência da verdade \models e do raciocínio científico \vdash

lógica computacional: a ciência e o engenho (algorítmico) da verdade e do raciocínio científico

a lógica fundamenta toda, toda a informática!

- circuitos booleanos, engenharia do hardware computacional
- teoria da algoritmia, complexidade algorítmica
- linguagens de query, SQL, Base de dados (SQL = lógica de primeira ordem!)
- teoria para o desenho das linguagens de programação (conhecido por: semântica das linguagens de programação)
- validação e verificação de programas
- mecanismos para sistemas de tempo real
- inteligência artificial, sistemas periciais
- gestão e inferência de conhecimento
- processamento da língua (natural ou de programação)
- segurança
- querem mais?.....

Uma aplicação surpreendente

a lógica e a programação

a lógica intuicionista/ a matemática construtiva

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (NL, 1881-1966) fundou a escola intuicionista (notoriamente numa comunicação na conferência de Viena em 1930)

o seu ponto de vista é que uma demonstração de devia de apresentar argumentos factuais sobre o seu objecto, ou seja ser uma **construção inequívoca da validade**, uma evidência comprovável

neste sentido, **recusou as provas por contradição** (muito comuns e práticas)

por exemplo uma demonstração de existência $\exists x.P(x)$ tem necessariamente de apresentar um testemunho a tal que $P(a)$

lógica do polícia vs. lógica do advogado

a sua obra e pensamento lógico foi tido como muito polêmico e extermista, ficou marginalizado na comunidade matemática mas foi verdadeiramente fecundo, como o veremos já a seguir



BHK - interpretation (wikipedia)

In mathematical logic, the Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation, or BHK interpretation, of intuitionistic logic was proposed by L. E. J. Brouwer, Arend Heyting and independently by Andrey Kolmogorov.

The interpretation states exactly what is intended to be a proof of a given formula. This is specified by induction on the structure of that formula:

- A proof of $P \wedge Q$ is a pair $\langle a, b \rangle$ where a is a proof of P and b is a proof of Q .
- A proof of $P \vee Q$ is a pair $\langle a, b \rangle$ where a is 0 and b is a proof of P , or a is 1 and b is a proof of Q .
- A proof of $P \rightarrow Q$ is a function f which converts a proof of P into a proof of Q .
- A proof of $\exists x \in S : \phi(x)$ is a pair $\langle a, b \rangle$ where a is an element of S , and b is a proof of $\phi(a)$.
- A proof of $\forall x \in S : \phi(x)$ is a function f which converts an element a of S into a proof of $\phi(a)$.
- The formula $\neg P$ is defined as $P \rightarrow \perp$, so a proof of it is a function f which converts a proof of P into a proof of \perp .
- \perp is absurdity. There ought not be a proof of it.

The interpretation of a primitive proposition is supposed to be known from context.

Curry-Howard Isomorphism (excerpt from wikipedia)

The Curry-Howard correspondence extends the BHK-interpretation and is the direct relationship between computer programs and mathematical proofs. It refers to the generalization of a syntactic analogy between systems of formal logic and computational calculi that was first discovered by the American mathematician Haskell Curry and logician William Alvin Howard.

logic	λ -calculus	Programming
formula	type	specification
proof	term	program
cut	β -reduction	execution

The relation with programming is particularly interesting when the logic/type language is rich enough. This is the case for the Calculus of Inductive Construction

Programming = Proving

Consequências? benefícios?

imagine que dispõe de uma linguagem de programação em que os tipos podem ser fórmulas lógicas; nesta linguagem de programação poderíamos expressar o tipo (fórmula) seguinte

$$\forall(x, y) \in \mathbb{N}^2. y > 0 \rightarrow \exists(q, r) \in \mathbb{N}^2. (y = (q \times x + r) \wedge r < x)$$

esta fórmula estabelece que para todo o par de inteiros naturais (x, y) em que y não é nulo é sempre possível obter o quociente e o resto da divisão de x por y

uma prova de tal fórmula pode ser vista como uma **função** que **calcula** dos parâmetros (x, y) e da garantia de que $y > 0$ **o par (q, r) e a prova de que $y = (q \times x + r) \wedge r < x$**

há sistemas computacionais que permitam isso? **SIM!**, o sistema COQ por exemplo

é possível programar efectivamente desta forma? **SIM!**

o sistema COQ é até capaz de produzir automaticamente programas eficientes (Haskell, OCaml, C) das provas que é capaz de produzir!

De facto, tais programas são **correctos/bug free** por construção!!!!

- Teorema: para todo o programa java existe um programa em assembly x86 equivalente
- escolhendo uma lógica constructiva adequada, garante-se que **cada demonstração deste teorema** pode ser convertido num **compilador genuino de Java!**
- ao usar mecanismos de extração de programa das demonstrações realizadas obtém-se **automaticamente** o teorema que afirma que o compilador preserva a semântica dos programas (i.e. é um **compilador comprovadamente sem bugs!**)⁵

... magia? Não.... lógica!

⁵por exemplo, o compilador C chamado CompCert

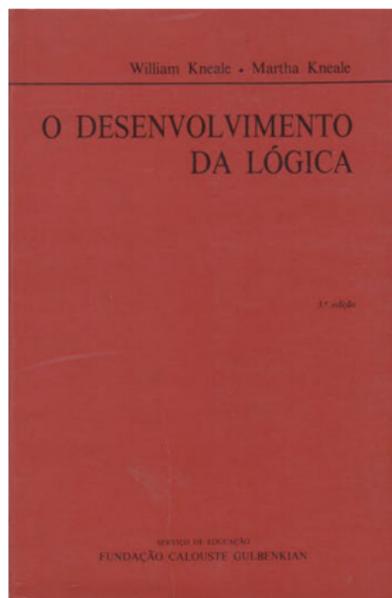
Conclusão. Quer saber mais?

este material apresentado foi realizado com base nas seguintes referências, umas lúdicas, outras mais técnicas, todas relevantes.

O Desenvolvimento da Lógica

W. Kneale and M. Kneale.

Fundação Calouste Gulbenkian, (1962) - 1991.
Terceira Edição.

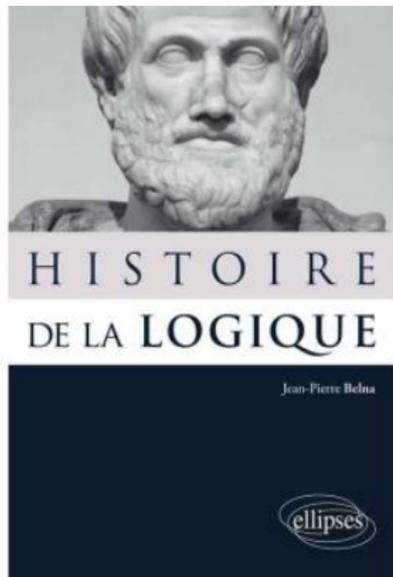


Histoire de la Logique

Jean-Pierre Belna

p. 220, Ellipse , 2014

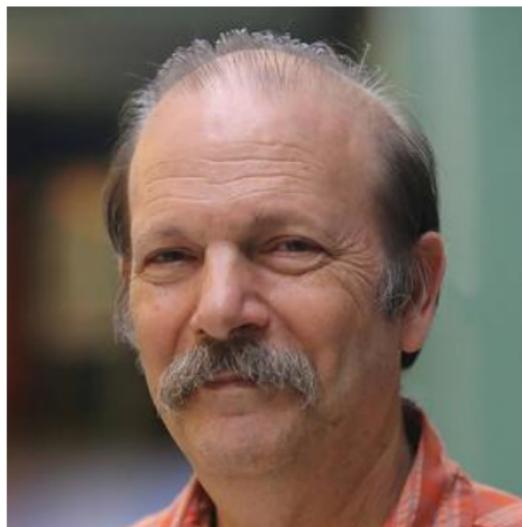
ISBN: 2729884483



a página da UC "*COMP 409/509: Logic in Computer Science and Artificial intelligence*" de Prof. Moshe Vardi (Rice University, USA) ([link](#))

contém informação generosa sobre a importância e a história da lógica para nós informáticos.

(ex: A brief history of Logic, On the unusual effectiveness of Logic in Computer Science)



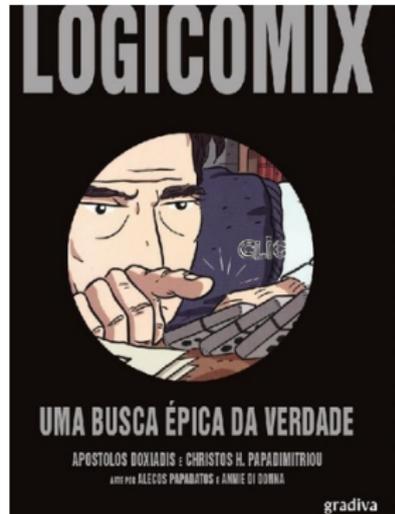
LOGICOMIX

Uma busca épica pela verdade

Christos Papadimitriou, Apostolos Doxiadis

p. 352, Gradiva , 2014

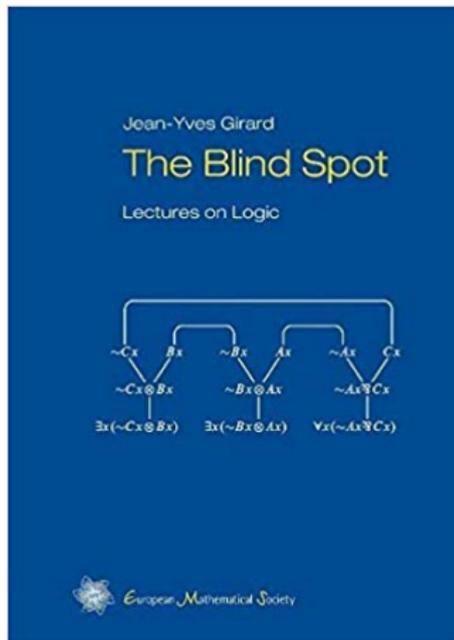
ISBN: 9789896166014



The Blind Spot, Lectures on Logic

Jean-Yves Girard

European Mathematical Society,
2011 - 537 páginas



a lógica de ontem, de hoje e de amanhã!

Computation, Proof, Machine,

Gilles Dowek

Cambridge University Press, 2015.



La logique,

Gilles Dowek

Le Pommier Eds., 2015. 128p.

