Lógica Computacional

Aula Teórica 6: Semântica da Lógica Proposicional

António Ravara Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Consequência semântica

Intuição

- Quer-se efectuar raciocínio entre asserções, de forma a retirar conclusões válidas a partir de hipóteses.
- Exemplo: se o metro se atrasar e não houver táxis na estação, o Pedro chega tarde. O Pedro não chegou tarde, mas o metro atrasou-se. Logo, havia táxis na estação.
- Formalização:
  - Hipótese 1: se p e não q então r, *i.e.*, $(p \land \neg q) \rightarrow r$.
  - Hipótese 2: não r e p, *i.e.*, $\neg r \land p$.
  - Tese: q.
- Como provar?

Consequência semântica

Definição 6.1

Sejam $\Phi \subseteq F_P$ e $\varphi \in F_P$. Diz-se que φ é *consequência semântica* de Φ, o que se denota por $\Phi \models \varphi$, se para cada estrutura de interpretação V sobre P, se $V \Vdash \Phi$ então $V \Vdash \varphi$.

Exemplo

Quer-se provar que é válido o raciocínio "Se o metro se atrasar e não houver táxis na estação, o Pedro chega tarde. O Pedro não chegou tarde, mas o metro atrasou-se. Logo, havia táxis na estação."

Em lógica proposicional, trata-se de provar que $\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$.

Exemplo

Quer-se mostrar que $\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$. Por definição, para todo o V tal que $V \Vdash \{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\}$ também $V \Vdash q$.

Por hipótese, $V \Vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow r$ e $V \Vdash \neg r \wedge p$. Tem-se então que , $V \Vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow r$ se

$$
\begin{aligned}
V((p \wedge \neg q) \rightarrow r) &= \\
\ominus V(p \wedge \neg q) \oplus V(r) &= \\
(\ominus V(p \otimes V(\neg q)) \oplus V(r) &= \\
(\ominus V(p) \oplus \ominus V(\neg q)) \oplus V(r) &= \\
(\ominus V(p) \oplus V(q)) \oplus V(r) &= 1
\end{aligned}
$$

que se verifica se algum dos argumentos da adição é 1, ou seja, se $V(p) = 0$ ou $V(q) = 1$ ou $V(r) = 1$.

Exemplo

Para mostrar $\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$ assume-se que $V \Vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow r$ e $V \Vdash \neg r \wedge p$, ou seja, $V \Vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow r$ se: $V(p) = 0$ ou $V(q) = 1$ ou $V(r) = 1$, e $V \Vdash \neg r \wedge p$ se

$$\begin{aligned} V(\neg r \wedge p) &= \\ V(\neg r) \otimes V(p) &= \\ \ominus V(r) \otimes V(p) &= 1 \end{aligned}$$

que se verifica se ambos os argumentos da multiplicação são 1, ou seja, se $V(r) = 0$ e $V(p) = 1$.

Exemplo

Para mostrar $\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$ assume-se que $V \Vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow r$ e $V \Vdash \neg r \wedge p$ ou seja:

1. $V(p) = 0$ ou
2. $V(q) = 1$ ou
3. $V(r) = 1$

e

4. $V(r) = 0$ e
5. $V(p) = 1$

e vai-se procurar concluir que $V \Vdash q$.

Exemplo

Quer-se mostrar que $\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$.

Tem que se verificar simultaneamente as hipóteses 4, 5 e alguma de entre as hipóteses 1, 2 e 3.

- 5 é incompatível com 1, logo esta última não se pode verificar.
- 4 é incompatível com 3, logo esta última não se pode verificar.
- Conclui-se então que tem que se verificar 2.

Algebricamente, substituindo 4 e 5 em $V((p \wedge \neg q) \rightarrow r) = 1$, obtém-se

$$\ominus V(p \wedge \neg q) \oplus V(r) = \ominus(1 \otimes V(\neg q)) \oplus 0 = \ominus \ominus V(q) = 1$$

Logo, $V \Vdash q$, como se queria mostrar.

Consequência semântica: o caso da contradição

Conjuntos contraditórios permitem qualquer conclusão: um conjunto de fórmulas Φ permite concluir uma fórmula φ se sempre que dada valoração V sobre P é tal que $V \Vdash \Phi$ também $V \Vdash \varphi$.

Logo, se nenhuma valoração V satisfaz Φ, *vacuosamente* $V \Vdash \varphi$.

Lema 6.1

Se um conjunto de fórmulas Φ é contraditório então, para qualquer fórmula φ tem-se que $\Phi \models \varphi$.

Exemplo: $\{p, \neg p\} \models \perp$

Não existe nenhum V que satisfaça simultaneamente p e $\neg p$ (porque V é uma função).

Logo, para qualquer V tal que $V \Vdash \{p, \neg p\}$ também $V \Vdash \perp$, portanto $\{p, \neg p\} \models \perp$

Provar ou refutar?

Estratégia

Quer-se provar ou refutar uma afirmação de consequência semântica. Como fazer?

1. Verifica-se primeiro se é falsa: alguma valoração não satisfaz o consequente mas satisfaz o antecedente. Se se encontrar tal valoração tem-se um contra-exemplo.
2. Se não se encontra um contra-exemplo faz-se a prova.

$\{p \to q, r \to s, r \vee s\} \models p \vee q$?

Considere-se V tal que $V(p) = 0 = V(q) = V(r)$ e $V(s) = 1$.

Então $V \Vdash p \to q$, $V \Vdash r \to s$ e $V \Vdash r \vee s$, ou seja, $V \Vdash \{p \to q, r \to s, r \vee s\}$.

No entanto, $V \nVdash p \vee q$, logo $\{p \to q, r \to s, r \vee s\} \not\models p \vee q$.

Provar ou refutar? Por absurdo

$\{(\varphi \wedge \psi) \to \delta, \gamma \to \varphi\} \models \psi \to (\gamma \to \delta)$?

Considera-se por hipótese que para algum V se tem que

1. $V \Vdash \{(\varphi \wedge \psi) \to \delta, \gamma \to \varphi\}$, mas que
2. $V \nVdash \psi \to (\gamma \to \delta)$. De 1 obtém-se:
3. $V \Vdash (\varphi \wedge \psi) \to \delta$ e
4. $V \Vdash \gamma \to \varphi$. De 2 obtém-se:
5. $V \Vdash \psi$, mas $V \nVdash \gamma \to \delta$, ou seja
6. $V \Vdash \gamma$, mas
7. $V \nVdash \delta$. De 4 e de 6 obtém-se:
8. $V \Vdash \varphi$. De 3, 5 e de 8 obtém-se:
9. $V \Vdash \delta$, o que está em contradição com 7. Logo, $\{(\varphi \wedge \psi) \to \delta, \gamma \to \varphi\} \models \psi \to (\gamma \to \delta)$.

Consequência semântica é implicação

Proposição 6.1

$$\{\varphi\} \models \psi \text{ se e só se } \models \varphi \to \psi$$

Prova

Mostra-se primeiro que se $\{\varphi\} \models \psi$ então $\models \varphi \to \psi$.

Por hipótese, $\{\varphi\} \models \psi$, ou seja, para qualquer V tem se que se $V \Vdash \varphi$ então $V \Vdash \psi$; logo, por definição, $\models \varphi \to \psi$.

Mostra-se que $\models \varphi \to \psi$ implica $\{\varphi\} \models \psi$ de forma semelhante.

Consequência semântica é implicação

Teorema 6.1

Seja $n \in \mathbb{N}$. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi \text{ se e só se } \models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$

Prova

Prova-se o sentido "só se" (o recíproco é semelhante). Por hipótese, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$, ou seja, sempre que dado V é tal que $V \Vdash \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ também $V \Vdash \psi$.

Se $V \nVdash \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, o resultado sai vacuosamente

Se $V \Vdash \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, então para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tem-se que $V \Vdash \varphi_i$; logo, $V \Vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Como por hipótese $V \Vdash \psi$, então $V \Vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$, como se queria mostrar.

Algumas leis da lógica proposicional

Teorema 6.2

1. $\{\bot\} \models \varphi$
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \models \varphi$ e $\{\varphi \wedge \psi\} \models \psi$
3. $\{\varphi\} \models \varphi \vee \psi$ e $\{\psi\} \models \varphi \vee \psi$

Prova

1. $\{\bot\} \models \varphi$ vacuosamente, pois $\{\bot\}$ é um conjunto contraditório
2. por hipótese, seja V tal que $V \Vdash \{\varphi \wedge \psi\}$, ou seja, $V \Vdash \varphi$ e $V \Vdash \psi$; então $\{\varphi \wedge \psi\} \models \varphi$ e $\{\varphi \wedge \psi\} \models \psi$
3. por hipótese, seja V tal que $V \Vdash \{\varphi\}$; logo $V \Vdash \varphi$, ou seja, $V(\varphi) = 1$, e tem-se também que $V(\varphi) \oplus V(\psi) = 1$, *i.e.*, $V \Vdash \varphi \vee \psi$; então $\{\varphi\} \models \varphi \vee \psi$
   O outro caso prova-se de forma semelhante.

Definição alternativa de consequência semântica

Observações

- A consequência semântica é uma relação $\models \subseteq 2^{F_P} \times F_P$
- Pode-se considerar uma definição alternativa, em que é uma relação binária entre fórmulas: $\models_1 \subseteq F_P \times F_P$
- Considere ambas as relações definidas da mesma forma: sempre que dada valoração satisfaz o primeiro elemento do par na relação (um conjunto de fórmulas ou uma fórmula) também satisfaz o segundo.

Definição alternativa de consequência semântica

Proposição 6.2: coincidência das definições

$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$ se e só se $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models_1 \psi$

Prova

$$\begin{array}{rl} \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi & \text{se e só se} \\ \models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi & \text{se e só se} \\ \{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n\} \models \psi & \text{se e só se} \\ (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \models_1 \psi & \end{array}$$

Chama-se então a ambas as relações "consequência semântica" e usa-se apenas o símbolo $\models$.

A consequência semântica é uma pré-ordem

Trivialmente, a consequência semântica é reflexiva.

Proposição 6.3: transitividade da consequência semântica

Se $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \gamma$ então $\varphi \models \gamma$

Prova

Por hipótese, $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \gamma$. Consideram-se dois casos: para dado V, ou $V \Vdash \varphi$ ou $V \nVdash \varphi$.

Suponha-se que $V \Vdash \varphi$; como por hipótese $\varphi \models \psi$, também $V \Vdash \psi$; como por hipótese $\psi \models \gamma$, também $V \Vdash \gamma$. Logo, sempre que $V \Vdash \varphi$ também $V \Vdash \gamma$, ou seja, $\varphi \models \gamma$.

Suponha-se agora que $V \nVdash \varphi$. Então, $V \Vdash \varphi \to \gamma$, logo $\varphi \models \gamma$.