Lógica Computacional

Aula Teórica 4: Semântica da Lógica Proposicional

António Ravara Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

O que se pretende?

Intuição

- A lógica proposicional trata da representação e manipulação de *asserções*.
- Dada uma fórmula da lógica, quer-se determinar o seu valor de verdade (0 — falsa, ou 1 — verdadeira).
- É necessário:
  - atribuir valores aos símbolos proposicionais;
  - avaliar as suas subfórmulas (estritas), interpretando os conectivos (que têm carácter funcional, *i.e.*, interpretação fixa).

Estrutura de interpretação

Definição 4.1

Seja $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ o *conjunto dos valores de verdade*.

Definição 4.2

Uma *estrutura de interpretação* (ou *valoração*) sobre um conjunto de símbolos proposicionais P é uma *função* $V : P \to \mathcal{B}$.

Intuição

- Se um símbolo proposicional p representa uma asserção verdadeira, então $V(p) = 1$; senão $V(p) = 0$.
- Para cada V considera-se a atribuição de valores aos símbolos de P fixada.

Semântica informal: relação de satisfação

A relação de satisfação de uma fórmula $\varphi \in F_P$ por uma valoração V, denotada por $V \Vdash \varphi$, é definida indutivamente pelas seguintes regras.

- para cada $p \in P$, tem-se $V \Vdash p$, se $V(p) = 1$;
- não se verifica $V \Vdash \bot$;
- $V \Vdash \varphi \vee \psi$, se $V \Vdash \varphi$ ou $V \Vdash \psi$;
- $V \Vdash \varphi \wedge \psi$, se $V \Vdash \varphi$ e $V \Vdash \psi$;
- $V \Vdash \varphi \to \psi$, se sempre que $V \Vdash \varphi$ também $V \Vdash \psi$.

Quando um par (V, φ) está na relação de satisfação, diz-se que a valoração V satisfaz a fórmula φ.

Satisfação de fórmulas: como verificar?

A semântica informal não é fácil de usar na prática, sobretudo para estabelecer resultados negativos.

Sejam $p, q \in P$ e $V : P \to \mathcal{B}$ tal que $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$

- $V \Vdash p \vee q$, pois $V(p) = 1$, logo $V \Vdash p$;
- $V \Vdash q \to p$, pois $V(q) = 0$ e então não se tem $V \Vdash q$, saindo vacuosamente o resultado;
- não se tem $V \Vdash p \to q$, pois apesar de $V(p) = 1$ e então $V \Vdash p$, ao contrário do exigido, como $V(q) = 0$ não se tem $V \Vdash q$;
- não se tem $V \Vdash p \wedge q$, pois apesar de $V(p) = 1$, e então $V \Vdash p$, ao contrário do exigido, como $V(q) = 0$ não se tem $V \Vdash q$.

Quer-se uma semântica não ambígua, matematicamente rigorosa.

Segue-se a proposta de George Boole para dar semântica à Lógica Proposicional.

Definição 4.3

Considera-se o *conjunto dos valores de verdade* $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, com as seguintes *operações*:

Multiplicação $\otimes$: $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ tal que

$$0 \otimes b = 0$$
$$1 \otimes b = b$$

Adição $\oplus$: $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ tal que

$$0 \oplus b = b$$
$$1 \oplus b = 1$$

Complementar $\ominus$: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ tal que

$$\ominus 0 = 1$$
$$\ominus 1 = 0$$

Propriedades básicas

Proposição 4.1

1. A multiplicação tem o valor 1 como elemento neutro e o 0 como elemento absorvente.
2. A adição tem o valor 0 como elemento neutro e o 1 como elemento absorvente.
3. A multiplicação e a adição são comutativas, associativas e mutuamente distributivas.
4. $b \oplus b = b$ e $b \otimes b = b$.
5. $\ominus(\ominus b) = b$.
6. $b \otimes (\ominus b) = 0$
7. $b \oplus (\ominus b) = 1$
8. $\ominus(b_1 \oplus b_2) = (\ominus b_1) \otimes (\ominus b_2)$
9. $\ominus(b_1 \otimes b_2) = (\ominus b_1) \oplus (\ominus b_2)$

Propriedades básicas

Provam-se alguns casos da proposição.

$\ominus(\ominus b) = b$

Considere-se que $b = 0$. Então, $\ominus(\ominus 0) = \ominus 1 = 0$.
O caso $b = 1$ tem prova semelhante.

$b \otimes b = b$

Considere-se que $b = 0$. Então, $b \otimes b = 0 \otimes 0 = 0 = b$.
Caso $b = 1$, então $b \otimes b = 1 \otimes 1 = 1 = b$.

$b \otimes (\ominus b) = 0$

Considere-se que $b = 0$. Então, $0 \otimes (\ominus 0) = 0$.
Caso $b = 1$, então $1 \otimes (\ominus 1) = (\ominus 1) = 0$.

Prova de algumas propriedades básicas

Comutatividade da adição: $b_1 \oplus b_2 = b_2 \oplus b_1$

Considere-se que $b_1 = 0$. Então, $b_1 \oplus b_2 = 0 \oplus b_2 = b_2$. Logo,

$$b_1 \oplus b_2 = \begin{cases} 0, \text{ se } b_2 = 0 \\ 1, \text{ se } b_2 = 1 \end{cases}$$

Por sua vez

$$b_2 \oplus b_1 = \begin{cases} 0 \oplus b_1 = b_1 = 0, & \text{se } b_2 = 0 \\ 1 \oplus b_1 = 1, & \text{se } b_2 = 1 \end{cases}$$

Logo, em ambos os casos se obtém o mesmo resultado.

Caso $b_1 = 1$ obtém-se o mesmo resultado de forma semelhante.

Prova de algumas propriedades básicas

Associatividade da multiplicação:
$b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3) = (b_1 \otimes b_2) \otimes b_3$

Considere-se que $b_1 = 0$. Então,

$$b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3) = 0 \otimes (b_2 \otimes b_3) = 0$$

Por sua vez

$$(b_1 \otimes b_2) \otimes b_3 = (0 \otimes b_2) \otimes b_3 = 0 \otimes b_3 = 0$$

Caso $b_1 = 1$. Tem-se agora que

$$b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3) = 1 \otimes (b_2 \otimes b_3) = b_2 \otimes b_3$$

Por sua vez

$$(b_1 \otimes b_2) \otimes b_3 = (1 \otimes b_2) \otimes b_3 = b_2 \otimes b_3$$

Propriedades básicas

A partir das provas apresentadas, observam-se os seguintes factos.

Lema 4.2

1. $b_1 \otimes b_2 = 0$ se e só se $b_1 = 0$ ou $b_2 = 0$.
2. $b_1 \otimes b_2 = 1$ se e só se $b_1 = 1$ e $b_2 = 1$.
3. $b_1 \oplus b_2 = 0$ se e só se $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$.
4. $b_1 \oplus b_2 = 1$ se e só se $b_1 = 1$ ou $b_2 = 1$.
5. $\ominus b = 0$ se e só se $b = 1$.
6. $\ominus b = 1$ se e só se $b = 0$.

As provas ficam como exercício.

Distributividade do complementar sobre a adição:
$\ominus(b_1 \oplus b_2) = (\ominus b_1) \otimes (\ominus b_2)$

Prova-se por casos (considerando-se os possíveis valores de cada termo da igualdade).

Considere-se que $\ominus(b_1 \oplus b_2) = 0$. Então, $b_1 \oplus b_2 = 1$.
Logo, ou $b_1 = 1$ ou $b_2 = 1$, e portanto, ou $\ominus b_1 = 0$ ou $\ominus b_2 = 0$.
Conclui-se que $(\ominus b_1) \otimes (\ominus b_2) = 0$.

Considere-se que $\ominus(b_1 \oplus b_2) = 1$. Então, $b_1 \oplus b_2 = 0$.
Logo, $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$, e portanto, $\ominus b_1 = 1$ e $\ominus b_2 = 1$.
Conclui-se que $(\ominus b_1) \otimes (\ominus b_2) = 1$.

Propriedades da igualdade

Proposição 4.2

A relação binária '=' em $\mathcal{B}$ é uma relação de equivalência.

É muito simples mostrar que é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Proposição 4.3: A relação binária '=' em $\mathcal{B}$ é preservada pelos operadores

Se $b_1 = b_2$ então:

1. $\ominus b_1 = \ominus b_2$
2. $b \oplus b_1 = b \oplus b_2$
3. $b \otimes b_1 = b \otimes b_2$

Provam-se considerando os dois casos possíveis ($b = 0$ ou $b = 1$).

Avaliação de fórmulas

Intuição

- A avaliação de uma fórmula é feita em dada estrutura de interpretação.
- Diz-se que a fórmula é *satisfeita* pela estrutura se é avaliada ao valor 1; senão não é satisfeita.
- A avaliação da fórmula depende da valoração dos seus símbolos proposicionais e dos conectivos lógicos nela presentes.
- A avaliação da fórmula pode variar conforme as valorações, mas a avaliação dos conectivos é fixa (funcional).

Satisfação de fórmulas

Definição 4.4

Seja V uma *valoração* sobre um conjunto de símbolos proposicionais P.

A extensão da valoração V ao conjunto de fórmulas proposicionais F_P é a aplicação $V : F_P \to \mathcal{B}$, definida indutivamente pelas seguintes regras:

- para cada $p \in P$, se $\varphi = p$ então $V(\varphi) = V(p)$
- $V(\perp) = 0$
- $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \oplus V(\psi)$
- $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \otimes V(\psi)$
- $V(\varphi \to \psi) = (\ominus V(\varphi)) \oplus V(\psi)$

Diz-se que uma valoração V *satisfaz* uma fórmula $\varphi \in F_P$, relação denotada por $V \Vdash \varphi$, se $V(\varphi) = 1$.

Terminologia e notação

- Se $V \Vdash \varphi$ diz-se que φ é *satisfeita* por V, ou que φ é *verdadeira* por V.
- Escreve-se $V \nVdash \varphi$ quando não se verifica que $V \Vdash \varphi$; diz-se que φ não é satisfeita por V, ou que φ é falsa por V.
- Dado $\Phi \subseteq F_P$, escreve-se $V \Vdash \Phi$, se $V \Vdash \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi$.

Satisfação de fórmulas: exercícios

Sejam $p, q \in P$ e $V : P \to \mathcal{B}$ tal que $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$

- $V \Vdash p \vee q$, pois $V(p \vee q) = V(p) \oplus V(q) = 1 \oplus V(q) = 1$;
- $V \nVdash p \wedge q$, pois $V(p \wedge q) = V(p) \otimes V(q) = 1 \otimes 0 = 0$;
- $V \Vdash p \to p$, pois
  $V(p \to p) = (\ominus V(p)) \oplus V(p) = (\ominus 1) \oplus 1 = 1$;
- $V \Vdash q \to q$, pois
  $V(q \to q) = (\ominus V(q)) \oplus V(q) = (\ominus 0) \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1$;
- $V \Vdash q \to p$, pois
  $V(q \to p) = (\ominus V(q)) \oplus V(p) = (\ominus 0) \oplus 1 = 1$;
- $V \nVdash p \to q$, pois
  $V(p \to q) = (\ominus V(p)) \oplus V(q) = (\ominus 1) \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0$.

Semântica informal da implicação

Intuição

Uma implicação só não é satisfeita quando o antecedente é verdadeiro mas o consequente falso.

É o caso do mentiroso, que promete mas não cumpre:

Se ganhar as eleições faço o clube ganhar o campeonato

Intuição

Uma implicação é sempre satisfeita quando o antecedente é falso.

É o caso da "falsa" promessa (vacuosamente verdadeira):

Nas aulas ao Domingo venho sempre de fato de banho.

Lema 4.3: $V(\neg\varphi) = \ominus V(\varphi)$

Definiu-se $\neg\varphi \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \to \bot$. Então,
$V(\neg\varphi) = V(\varphi \to \bot) = (\ominus V(\varphi)) \oplus V(\bot) = (\ominus V(\varphi)) \oplus 0 = (\ominus V(\varphi))$

Lema 4.4

1. $V \nVdash \varphi$ se e só se $V \Vdash \neg\varphi$
2. $V \Vdash \varphi$ se e só se $V \nVdash \neg\varphi$

Prova-se a primeira afirmação (a prova da segunda é semelhante).

Sentido "só se": Por hipótese $V \nVdash \varphi$, *i.e.*, $V(\varphi) = 0$. Então, $V(\neg\varphi) = (\ominus V(\varphi)) = (\ominus 0) = 1$, ou seja $V \Vdash \neg\varphi$.

Sentido "se": Por hipótese $V \Vdash \neg\varphi$, *i.e.*, $V(\neg\varphi) = 1$. Então, $V(\neg\varphi) = (\ominus V(\varphi)) = 1$, ou seja, $V(\varphi) = 0$. Logo, $V \nVdash \varphi$.