Lógica Computacional

Aula Teórica 18: Leis da Lógica de Primeira Ordem

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Lema das variáveis livres

Lema 18.1

- $[\![t]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = [\![t]\!]^{\rho'}_{\mathcal{M}}$, se $\rho(x) = \rho'(x)$ para cada $x \in \mathsf{V}(t)$.
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho' \Vdash \varphi$, se $\rho(x) = \rho'(x)$ para cada $x \in \mathsf{VL}(\varphi)$.

Corolário 18.1

Seja t um termo fechado e φ uma fórmula fechada

- $[\![t]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = [\![t]\!]^{\rho'}_{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho' \Vdash \varphi$.
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.
- $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ ou $\mathcal{M} \Vdash \neg\varphi$.

Congruência α

Motivação

A identidade das variáveis mudas não é importante:

- qualquer identificador serve;
- pode-se trocar o identificador sem alterar o sentido da fórmula.

Lema 18.2

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ, uma fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$ e seja $y \notin \mathrm{VL}(\varphi)$ livre para x em φ.

- $\forall x\, \varphi \equiv \forall y\, \varphi\{y/x\}$.
- $\exists x\, \varphi \equiv \exists y\, \varphi\{y/x\}$.

Fecho de variáveis em fórmulas

Motivação

Se a satisfação de uma fórmula não depende da atribuição considerada, as variáveis podem ser todas mudas.

Lema 18.3

- $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M} \Vdash \forall x\, \varphi$.
- $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M} \Vdash \mathsf{Fch}(\varphi)$, sendo $\mathsf{Fch}(\varphi)$ o fecho universal de φ.

Variável por variável

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ, uma atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$, duas variáveis $x, y \in X$ e um valor $u \in U$.

Lema 18.4

- Dado $t \in T^X_\Sigma$, se $y \notin \mathrm{V}(t) \setminus \{x\}$ então

$$[\![t]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = [\![t\{y/x\}]\!]^{\rho[y:=u]}_{\mathcal{M}}$$

- Dada $\varphi \in F^X_\Sigma$, se y é livre para x em φ e $y \notin \mathrm{VL}(\varphi) \setminus \{x\}$ então

$$\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho[y := u] \Vdash \varphi\{y/x\}$$

Variável por termo

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ, uma atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$, uma variável $x \in X$ e um valor $u \in U$.

Lema 18.5

- Dado $t \in T^X_\Sigma$, se $r \in T^X_\Sigma$ tal que $[\![r]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = u$ então

$$[\![t]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = [\![t\{r/x\}]\!]^\rho_{\mathcal{M}}$$

- Dada $\varphi \in F^X_\Sigma$, se $t \in T^X_\Sigma$ tal que t é livre para x em φ e $[\![t]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = u$ então

$$\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi\{t/x\}$$

Variável por termo

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ, uma atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ e uma variável $x \in X$.

Corolário 18.2

Dada $\varphi \in F^X_\Sigma$ e sendo $t \in T^X_\Sigma$ livre para x em φ, tem-se que:

- $\{\varphi\{t/x\}\} \models \exists x\, \varphi$
- $\{\forall x\, \varphi\} \models \varphi\{t/x\}$

Corolário 18.3

Se para cada $u \in U$ existe um termo fechado $t \in T^X_\Sigma$ tal que $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} = u$ então, para dada φ, tem-se que

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi \text{ se e só se, para cada } u \in U,\ \mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi\{t/x\}$$

Interacção entre quantificadores e conectivos proposicionais

Algumas leis

- $\{\forall x\, \varphi\} \models \exists x\, \varphi$, sendo $x \in \mathsf{VL}(\varphi)$
- $\{\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi\} \models \forall x\, (\varphi \vee \psi)$
- $\{\exists x\, (\varphi \wedge \psi)\} \models \exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi$
- $\{\forall x\, (\varphi \to \psi)\} \models \forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi$
- $\{\exists y\, \forall x\, \varphi\} \models \forall x\, \exists y\, \varphi$

Recíprocos não são verdadeiros

As fórmulas em cada item não são equivalentes.

Uma prova

$\{\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi\} \models \forall x\, (\varphi \vee \psi)$

Por hipótese, para dada estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ e dada atribuição $\rho : X \to U$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi$, ou seja,

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi \text{ ou } \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \psi \qquad (1)$$

Considerando um valor arbitrário $u \in U$, por 1 obtém-se

$$\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \text{ ou } \mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi \qquad (2)$$

Então, de 2 conclui-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \vee \psi$; logo tem-se também que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, (\varphi \vee \psi)$, como se queria mostrar.

Um contra-exemplo

$\{\forall x\,(\varphi \vee \psi)\} \not\models \forall x\,\varphi \vee \forall x\,\psi$

Seja $\varphi = P(x)$ e $\psi = Q(x)$.

Considere-se a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ sendo
$I(P): \ \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ tal que $I(P)(n) = 1$ se n é par, e
$I(Q): \ \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ tal que $I(Q)(n) = 1$ se n é ímpar.

Como todo o natural ou é par ou é ímpar, tem-se que $\mathcal{M} \Vdash \forall x\,(\varphi \vee \psi)$, mas não se tem que todo o natural é par ou todo o natural é ímpar, logo $\mathcal{M} \nVdash \forall x\,\varphi \vee \forall x\,\psi$.

Outra prova

$\{\exists y \, \forall x \, \varphi\} \models \forall x \, \exists y \, \varphi$

Por hipótese, para dada estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ e dada atribuição $\rho : X \to U$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists y \, \forall x \, \varphi$, ou seja, para um dado $v \in U$,

$$\mathcal{M}, \rho[y := v] \Vdash \forall x \, \varphi \tag{3}$$

Considerando um valor arbitrário $u \in U$, por 3 obtém-se

$$\mathcal{M}, \rho[y := v][x := u] \Vdash \varphi \tag{4}$$

Como $\rho[y := v][x := u] = \rho[x := u][y := v]$, de 4 conclui-se que para qualquer $u \in U$ e para um dado $v \in U$ se tem $\mathcal{M}, \rho[x := u][y := v] \Vdash \varphi$; logo tem-se também que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \, \exists y \, \varphi$, como se queria mostrar.

Outro contra-exemplo

$\{\forall x\, \exists y\, \varphi\} \not\models \exists y\, \forall x\, \varphi$

Seja $\varphi = P(x) \to Q(x, y)$.

Considere-se a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ sendo $I(P) : \ \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ tal que $I(P)(n) = 1$ se n é quadrado perfeito, e $I(Q) : \ \mathbb{N}_0^2 \to \{0, 1\}$ tal que $I(Q)(n, m) = 1$ se m é a raíz de n.

Como todo o quadrado perfeito tem uma raíz, $\mathcal{M} \Vdash \forall x\, \exists y\, \varphi$, mas não se tem que existe uma única raíz para todo o quadrado perfeito, logo $\mathcal{M} \nVdash \exists y\, \forall x\, \varphi$.

Leis de De Morgan

$\neg \forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg \varphi$

Tem que se provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ se tem que

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \forall x\, \varphi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \neg \varphi$$

Prova-se o sentido "só se" da equivalência (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \forall x\, \varphi$, ou seja, não se tem que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi$. Então, para algum $u \in U$, não se tem que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$, *i.e.*, $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \neg \varphi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \neg \varphi$, como se queria mostrar.

Leis de De Morgan

$\neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi$

Tem que se provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR^{X}_{\mathcal{M}}$ se tem que

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg\exists x\,\varphi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\,\neg\varphi$$

Prova-se o sentido "só se" da equivalência (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg\exists x\,\varphi$, ou seja, não se tem que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\,\varphi$. Então, para nenhum $u \in U$, se tem que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$, *i.e.*, qualquer que seja o valor u considerado, $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \neg\varphi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\,\neg\varphi$, como se queria mostrar.

Quantificadores como abreviatura

$\exists x\, \varphi = \neg \forall x\, \neg \varphi$

Quer-se mostrar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR^{X}_{\mathcal{M}}$ se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \forall x\, \neg \varphi$ então $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \varphi$, e logo não é necessário ter o quantificador existencial como primitivo.

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \forall x\, \neg \varphi$ e como $\forall x\, \neg \varphi \equiv \neg \exists x\, \varphi$, pelo Teorema da Substitutividade, também $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg\neg \exists x\, \varphi$. Uma vez que $\neg\neg \varphi \equiv \varphi$, conclui-se então que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \varphi$, como se queria mostrar.

$\forall x\, \varphi = \neg \exists x\, \neg \varphi$

A prova é semelhante.

Leis de distribuição

$\forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi \equiv \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$

Tem que se provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ se tem que

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$$

Prova-se o sentido "se" da equivalência (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$, ou seja, qualquer que seja o valor $u \in U$ considerado, tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \wedge \psi$. Para todo o u tem-se, por definição, que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ e $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi$; logo, tem-se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi$ e $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \psi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi$, como se queria mostrar.

Leis de distribuição

$\exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi \equiv \exists x\, (\varphi \vee \psi)$

Tem que se provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ se tem que

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, (\varphi \vee \psi)$$

Prova-se o sentido "se" da equivalência (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, (\varphi \vee \psi)$, ou seja, para algum valor $u \in U$, tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \vee \psi$. Para esse u tem-se, por definição, que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ ou $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi$; logo, ou se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \varphi$ ou se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \psi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi$, como se queria mostrar.

Leis de âmbito de quantificadores

Algumas leis

- $\forall x \, \forall y \, \varphi \equiv \forall y \, \forall x \, \varphi$
- $\exists x \, \exists y \, \varphi \equiv \exists y \, \exists x \, \varphi$
- Considere que $x \notin \mathsf{VL}(\psi)$.
  - $\forall x \, \varphi \wedge \psi \equiv \forall x \, (\varphi \wedge \psi)$
  - $\forall x \, \varphi \vee \psi \equiv \forall x \, (\varphi \vee \psi)$
  - $\exists x \, \varphi \wedge \psi \equiv \exists x \, (\varphi \wedge \psi)$
  - $\exists x \, \varphi \vee \psi \equiv \exists x \, (\varphi \vee \psi)$
  - $\forall x \, (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \psi \rightarrow \forall x \, \varphi$
  - $\exists x \, (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \psi \rightarrow \exists x \, \varphi$
  - $\forall x \, (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \exists x \, \varphi \rightarrow \psi$
  - $\exists x \, (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \forall x \, \varphi \rightarrow \psi$

Provas

Lema

Se $x \notin \mathsf{VL}(\varphi)$ então para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^{X}$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$.

Prova

Por indução na estrutura de φ, usando alguns lemas anteriores.

Se $x \notin \mathsf{VL}(\psi)$ então $\forall x\, \varphi \wedge \psi \equiv \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$

Tem que se provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^{X}$ se tem que, se $x \notin \mathsf{VL}(\psi)$ então

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi \wedge \psi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$$

Prova-se o sentido "se" da equivalência, usando o sentido "só se" do lema (o recíproco tem prova semelhante).

Prova

Lema

Se $x \notin \mathrm{VL}(\varphi)$ então para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR^{X}_{\mathcal{M}}$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$.

Seja $x \notin \mathrm{VL}(\psi)$. Para quaisquer $\mathcal{M}, \rho$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi \wedge \psi$ se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$

Por Hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$, ou seja, qualquer que seja o valor $u \in U$ considerado, tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \wedge \psi$. Logo, para todo o u tem-se, por definição, que

1. $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$, e
2. $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi$.

Por 1 tem-se que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi$, e por 2 e pelo lema acima, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$, logo $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi \wedge \psi$, como se queria mostrar.

Mais provas

As provas usam o Teorema da Substitutividade.

$\forall x\,(\psi \to \varphi) \equiv \psi \to \forall x\,\varphi$, se $x \notin VL(\psi)$

$$
\begin{array}{rcll}
\forall x\,(\psi \to \varphi) & \equiv & \forall x\,(\neg\psi \vee \varphi) & (\text{pois } \psi \to \varphi \equiv \neg\psi \vee \varphi) \\
 & \equiv & \forall x\,(\varphi \vee \neg\psi) & (\text{pois } \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi) \\
 & \equiv & \forall x\,\varphi \vee \neg\psi & (\text{pois } \forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi) \\
 & \equiv & \neg\psi \vee \forall x\,\varphi & (\text{pois } \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi) \\
 & \equiv & \psi \to \forall x\,\varphi & (\text{pois } \neg\psi \vee \varphi \equiv \psi \to \varphi)
\end{array}
$$

$\forall x\,(\varphi \to \psi) \equiv \exists x\,\varphi \to \psi$, se $x \notin VL(\psi)$

$$
\begin{array}{rcll}
\forall x\,(\varphi \to \psi) & \equiv & \forall x\,(\neg\varphi \vee \psi) & (\text{pois } \psi \to \varphi \equiv \neg\psi \vee \varphi) \\
 & \equiv & \forall x\,\neg\varphi \vee \psi & (\text{pois } \forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x\,\varphi \vee \psi) \\
 & \equiv & \neg\exists x\,\varphi \vee \psi & (\text{pois } \forall x\,\neg\varphi \equiv \neg\exists x\,\varphi) \\
 & \equiv & \exists x\,\varphi \to \psi & (\text{pois } \neg\varphi \vee \psi \equiv \varphi \to \psi)
\end{array}
$$