Lógica Computacional

Aula Teórica 17: Semântica da Lógica de Primeira Ordem

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Definição 17.1

Considere-se uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$. Uma *estrutura de interpretação sobre* Σ é um par $\mathcal{M} = (U, I)$ sendo:

- U um conjunto não vazio, designado por *universo* ou *domínio* da estrutura;
- I uma *função*, designada *de interpretação*, que a cada símbolo de Σ associa uma aplicação do seguinte modo:
  - para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $f \in SF_n$, tem-se $I(f): \ U^n \to U$;
  - para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $P \in SP_n$, tem-se $I(P): \ U^n \to \{0, 1\}$.

Exemplos

Os naturais

Considere-se a assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, onde

- $SF_0 = \{Zero\}$, $SF_1 = \{Suc, Quad\}$ e $SF_i = \emptyset$, para $i \geq 2$;
- $SP_1 = \{Q\}$, $SP_2 = \{M\}$ e $SP_i = \emptyset$, para $i = 0$ ou $i \geq 3$.

A estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ sobre Σ é definida por:

- $I(Zero) = 0$,
- $I(Suc) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ é tal que $I(Suc)(n) = n + 1$,
- $I(Quad) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ é tal que $I(Quad)(n) = n \times n$,
- $I(Q) : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ é tal que $I(Q)(n) = 1$, se n é um quadrado perfeito, e $I(Q)(n) = 0$ caso contrário,
- $I(M) : \mathbb{N}_0^2 \to \{0, 1\}$ é tal que $I(M)(n, m) = 1$, se $n > m$, e $I(M)(n, m) = 0$ caso contrário.

Definições

Definição 17.2: Atribuição de X em $\mathcal{M}$

- Dada uma estrutura de interpretação sobre uma assinatura Σ, uma *atribuição* de X em $\mathcal{M}$ é uma aplicação

$$\rho: \; X \to U$$

  que associa a cada variável de X um elemento do universo U.
- O conjunto de todas as atribuições de X em $\mathcal{M}$ designa-se por $ATR^X_{\mathcal{M}}$.

Definição 17.3: Atribuição x-equivalente

- Dadas duas atribuições ρ, ρ' de X em $\mathcal{M}$, diz-se que ρ é *x-equivalente* a ρ', se $\rho(y) = \rho'(y)$, para cada $y \in X \setminus \{x\}$.
- Seja $\rho[x := u]$ a atribuição x-equivalente a ρ que atribui o valor u à variável x.

Definição 17.4

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ e uma atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$.

A *interpretação dos termos em* $\mathcal{M}$ *com* ρ é uma função

$$[\![\cdot]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} : \; T^X_{\Sigma} \to U$$

definida indutivamente pelas seguintes regras:

- $[\![x]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = \rho(x)$, para $x \in X$;
- $[\![c]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = I(c)$, para $c \in SF_0$;
- $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = I(f)([\![t_1]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}})$, para $f \in SF_n, \; t_1, \ldots, t_n \in T^X_{\Sigma}$ e $n > 0$.

Exemplos

Ainda sobre os naturais

Considerando a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ do exemplo anterior, e assumindo $x, y \in X$ e a atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ tal que $\rho(x) = 1$ e $\rho(y) = 2$, tem-se que

- $[\![Zero]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = I(Zero) = 0$
- $[\![Suc(x)]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = I(Suc)([\![x]\!]^\rho_{\mathcal{M}}) = \rho(x) + 1 = 1 + 1 = 2$
- $[\![Quad(y)]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = I(Quad)([\![y]\!]^\rho_{\mathcal{M}}) = \rho(y) \times \rho(y) = 2 \times 2 = 4$
- $[\![Quad(Suc(x))]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = I(Quad)([\![Suc(x)]\!]^\rho_{\mathcal{M}}) = I(Quad)(2) = 2 \times 2 = 4$

Avaliação de fórmula

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ e uma atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$

Definição 17.5: $[\![\cdot]\!]^\rho_{\mathcal{M}} : \; F^X_\Sigma \to \{0, 1\}$

A *avaliação de uma fórmula* $\varphi \in F^X_\Sigma$ *por* $\mathcal{M}$ *com* ρ é a função definida indutivamente pelas seguintes regras:

- $[\![\bot]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = 0$
- $[\![P]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = I(P)$, para cada $P \in SP_0$
- $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = I(P)([\![t_1]\!]^\rho_{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_n]\!]^\rho_{\mathcal{M}})$, para cada $P \in SP_n, \; t_1, \ldots, t_n \in T^X_\Sigma$ e $n > 0$
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} \oplus [\![\psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}}$
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} \otimes [\![\psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}}$
- $[\![\varphi \to \psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \ominus[\![\varphi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} \oplus [\![\psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}}$

Avaliação de fórmula (continuação)

Definição 17.5: $[\![\cdot]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} : \; F^X_\Sigma \to \{0, 1\}$

A *avaliação de uma fórmula* $\varphi \in F^X_\Sigma$ *por* $\mathcal{M}$ *com* ρ é a função definida indutivamente pelas regras anteriores e pelas seguintes:

- $[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$ se para todo o $u \in U$ se tem $[\![\varphi]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = 1$ e $[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 0$ se para algum $u \in U$ se tem $[\![\varphi]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = 0$
- $[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$ se para algum $u \in U$ se tem $[\![\varphi]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = 1$ e $[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 0$ se para todo o $u \in U$ se tem $[\![\varphi]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = 0$

Relação de satisfação

- Uma fórmula $\varphi \in F^X_\Sigma$ é *satisfeita por* $\mathcal{M}$ *com* ρ, *i.e.*, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$, se $[\![\varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$.
- Se $[\![\varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 0$ diz-se que a fórmula *não é satisfeita por* $\mathcal{M}$ *com* ρ, *i.e.*, $\mathcal{M}, \rho \nVdash \varphi$

Modelo de fórmula

Por vezes as variáveis não desempenham um papel relevante.

Definição 17.6

Uma estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ diz-se um *modelo* de uma fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^{X}$, o que se denota por $\mathcal{M} \Vdash \varphi$, se para cada $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^{X}$ se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$.

Observações

- Os conceitos anteriores estendem-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg\varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \nVdash \varphi$.
- $\mathcal{M} \Vdash \neg\varphi$ se e só se $\mathcal{M} \nVdash \varphi$.

De novo sobre os naturais

Considerando a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ do exemplo anterior, e assumindo $x, y \in X$ e a atribuição $\rho \in ATR^{X}_{\mathcal{M}}$ tal que $\rho(x) = 1$ e $\rho(y) = 2$, tem-se que

- $\mathcal{M}, \rho \Vdash Q(Zero)$ pois como 0 é um quadrado perfeito,

$$[\![Q(Zero)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = I(Q)([\![Zero]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) = I(Q)(I(Zero)) = I(Q)(0) = 1$$

- $\mathcal{M}, \rho \nVdash M(x, y)$ pois como 1 não é maior que 2,

$$[\![M(x,y)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = I(M)([\![x]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}, [\![y]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) = I(M)(\rho(x), \rho(y)) = 1 > 2 = 0$$

De novo sobre os naturais (continuação do exemplo anterior)

$$\mathcal{M}, \rho \not\Vdash Q(Suc(x)) \wedge M(Quad(Suc(y)), Suc(x))$$

pois como 2 não é um quadrado perfeito, $\mathcal{M}, \rho \not\Vdash Q(Suc(x))$:

$$\begin{aligned}
[\![Q(Suc(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} &= I(Q)([\![Suc(x)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) \\
&= I(Q)(I(Suc)([\![x]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}})) \\
&= I(Q)(I(Suc)(\rho(x))) \\
&= I(Q)(1+1) = I(Q)(2) = 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$[\![Q(Suc(x)) \wedge M(Quad(Suc(y)), Suc(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} =$$
$$[\![Q(Suc(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} \otimes [\![M(Quad(Suc(y)), Suc(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 0$$

Exemplos

Ainda sobre os naturais (continuação do exemplo anterior)

$\mathcal{M}, \rho \not\Vdash \forall x\, Q(x)$ pois nem todos os naturais são quadrados perfeitos.

Tomando por exemplo 5 para valor de x tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := 5] \not\Vdash Q(x)$, porque

$$[\![Q(x)]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=5]} = I(Q)([\![x]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=5]}) = I(Q)(\rho[x := 5](x)) = I(Q)(5) = 0$$

Exemplos

Ainda sobre os naturais (continuação do exemplo anterior)

$\mathcal{M}, \rho \Vdash Q(Zero) \wedge \exists x\, M(x, Zero)$ pois

- já vimos que $\mathcal{M}, \rho \Vdash Q(Zero)$; e
- vamos mostrar que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, M(x, Zero)$.

$\mathcal{M}, \rho[x := 4] \Vdash M(x, Zero)$, porque

$$\begin{aligned} [\![M(x, Zero)]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=4]} = I(M)([\![x]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=4]}, [\![Zero]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=4]}) = \\ I(M)(\rho[x := 4](x), I(Zero)) = \\ 4 > 0 = 1 \end{aligned}$$

Logo,

$$[\![Q(Zero) \wedge \exists x\, M(x, Zero)]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho} = 1 \otimes 1 = 1$$

Continuando com os naturais

Considerando sempre a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$, mostra-se agora que $\mathcal{M} \Vdash \forall x\, Q(Quad(x))$.

Para qualquer $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, Q(Quad(x))$, uma vez que para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$ se tem que

$$\begin{array}{rcl} [\![\forall x\, Quad(x)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} & = & I(Q)([\![Quad(x)]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}}) \\ & = & I(Q)(I(Quad)([\![x]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}})) \\ & = & I(Q)(I(Quad)(\rho[x := n](x))) \\ & = & I(Q)(n \times n) \\ & = & 1 \end{array}$$

Fórmulas contraditórias, possíveis e válidas

Definição 17.7

Uma fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^{X}$ diz-se:

- *possível*, se existe uma estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre uma assinatura Σ e uma atribuição $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^{X}$ tal que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$;
- *contraditória*, se não é possível;
- *valida*, o que se denota por $\models \varphi$, se qualquer que seja a estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre uma assinatura Σ se tem que $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.

Os conceitos estendem-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Definição 17.8

- Sendo $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$, a fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$ diz-se *consequência semântica* do conjunto de fórmulas Φ, o que se denota por $\Phi \models \varphi$, se para toda a estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre uma assinatura Σ e para cada atribuição $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$ se tem que se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \Phi$ então $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$;
- As fórmulas $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ dizem-se *logicamente equivalentes*, o que se denota por $\varphi \equiv \psi$, se para toda a estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre uma assinatura Σ e para cada atribuição $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$ se tem que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$.

Os conceitos estendem-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Resultados

Lema 17.1: Propriedades da consequência semântica

A consequência semântica é uma ordem parcial.

Lema 17.2: Propriedades da equivalência lógica

1. É uma relação de equivalência.
2. É preservada pelos operadores da lógica de primeira ordem.
3. É substitutiva

Logo, a equivalência lógica na primeira ordem é uma congruência (Corolário 17.1).