Lógica Computacional

Aula Teórica 16: Sintaxe da Lógica de Primeira Ordem

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Ocorrências de variáveis em fórmulas

Validade depende do modelo?

- Funções e predicados têm que ser "interpretados" (ter associado "valor" em algum domínio/modelo)
  Exemplo: A relação I do exemplo da aula anterior não pode ser reflexiva (ninguém é irmão de si mesmo).
- Há fórmulas que são sempre verdadeiras, independentemente do modelo: $P(c) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(c)$

Tipos de ocorrências de variáveis

- *Mudas*, ou no âmbito de um quantificador:
  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ ou $\forall z(P(z) \rightarrow Q(z))$ (são equivalentes)
- *Livres*, como y em $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x, y))$
  ou x e y em $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge R(x, y)$

Variáveis em termos

Definição 16.1

O conjunto das variáveis num termo $t \in T_\Sigma^X$, denotado por $V(t)$, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $V(c) = \emptyset$, para cada $c \in SF_0$;
- $V(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $f \in SF_n$, com $n > 0$, então $V(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^n V(t_i)$.

Um termo sem variáveis diz-se *fechado*; caso contrário diz-se *aberto*.

O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de termos.

Variáveis livres e mudas

Definição 16.2: Variáveis livres

O conjunto das variáveis *livres* numa fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$, denotado por $VL(\varphi)$, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $VL(\varphi) = \emptyset$, para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $P(t_1, \ldots, t_n) \in F_\Sigma^X$ para cada $P \in SP_n$, com $n > 0$, então $VL(P(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^n V(t_i)$;
- se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $VL(\varphi \vee \psi) = VL(\varphi \wedge \psi) = VL(\varphi \to \psi) = VL(\varphi) \cup VL(\psi)$;
- se $x \in X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$ então $VL(\forall x\, \varphi) = VL(\exists x\, \varphi) = VL(\varphi) \setminus \{x\}$.

Uma fórmula sem variáveis *livres* diz-se *fechada*; caso contrário diz-se *aberta*.

O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Variáveis livres e mudas

Definição 16.3: Variáveis mudas

O conjunto das variáveis *mudas* numa fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$, denotado por $VM(\varphi)$, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $VM(\varphi) = \emptyset$, para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $P(t_1, \ldots, t_n) \in F_\Sigma^X$ para cada $P \in SP_n$, com $n > 0$, então $VM(P(t_1, \ldots, t_n)) = \emptyset$;
- se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $VM(\varphi \vee \psi) = VM(\varphi \wedge \psi) = VM(\varphi \to \psi) = VM(\varphi) \cup VM(\psi)$;
- se $x \in X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$ então $VM(\forall x\, \varphi) = VM(\exists x\, \varphi) = VM(\varphi) \cup \{x\}$.

O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Definição 16.4: Variáveis numa fórmula

O conjunto das variáveis duma fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^{X}$, denotado por $V(\varphi)$, é o conjunto $V(\varphi) = VL(\varphi) \cup VM(\varphi)$.
O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Definição 16.5: Fecho universal de fórmula

Seja $\varphi \in F_{\Sigma}^{X}$. Se $VL(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}, n \geq 1$, então a fórmula

$$\forall x_1(\ldots(\forall x_n \varphi)\ldots)$$

diz-se o *fecho universal de* φ.
Se $n = 0$ então φ é o seu próprio fecho universal.

Variáveis livres e mudas: exemplos e cálculo

Exemplos

- Seja $\varphi = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

$$VL(\varphi) = \emptyset, VM(\varphi) = \{x\} = V(\varphi)$$

- Seja $\varphi = \forall x(P(x) \rightarrow R(x, y))$

$$VL(\varphi) = \{y\}, VM(\varphi) = \{x\} \text{ e } V(\varphi) = \{x, y\}$$

- Seja $\varphi = \forall x(P(x) \rightarrow R(x, y)) \vee Q(x)$

$$VL(\varphi) = \{x, y\}, VM(\varphi) = \{x\} \text{ e } V(\varphi) = \{x, y\}$$

Variáveis livres e mudas: exemplos e cálculo

Cálculo recursivo: $VL(\forall x(P(x) \to R(x,y)) \vee Q(x)) = \{x,y\}$

$$
\begin{aligned}
VL(\forall x(P(x) \to R(x,y)) \vee Q(x)) &= \\
VL(\forall x(P(x) \to R(x,y))) \cup VL(Q(x)) &= \\
(VL(P(x) \to R(x,y)) \setminus \{x\}) \cup V(x) &= \\
(VL(P(x)) \cup VL(R(x,y)) \setminus \{x\}) \cup \{x\} &= \\
(V(x) \cup (V(x) \cup V(y))) \setminus \{x\}) \cup \{x\} &= \\
(\{x\} \cup \{x,y\}) \setminus \{x\}) \cup \{x\} &= \\
(\{x,y\} \setminus \{x\}) \cup \{x\} &= \\
\{y\} \cup \{x\} &= \\
\{x,y\}
\end{aligned}
$$

O que se pretende?

Motivação

- Uma fórmula como $\forall x P(x)$ captura o facto de a propriedade P ser verdadeira para todos os elementos de dado universo.
- Então, substituindo a variável por um termo qualquer, a propriedade é verdadeira.

  Ou seja, se se tem $\forall x P(x)$ também se deve ter $P(t)$, para qualquer termo $t \in T_\Sigma^X$, pois os termos designam elementos do universo em questão.

  A fórmula $\forall x P(x) \to P(t)$, sendo $t \in T_\Sigma^X$, é válida.
- Só se podem substituir variáveis livres: $\forall x P(x)$ não é equivalente a $P(3)$.

Termos por variáveis

Definição 16.6: Substituição em termo

Dados termos $s, t \in T_\Sigma^X$, o termo $s\{t/x\}$, que se obtém substituindo x por t em s é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $c\{t/x\} = c$, para cada $c \in SF_0$;
- $x\{t/x\} = t$, para cada $x \in X$;
- $y\{t/x\} = y$, para cada $y \in X \setminus \{x\}$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $f \in SF_n$, com $n > 0$, então

$$f(t_1, \ldots, t_n)\{t/x\} = f(t_1\{t/x\}, \ldots, t_n\{t/x\})$$

Exemplo: $f(x)\{3/x\} = f(3)$; se $f(x) = x + 1$ então $f(x)\{3/x\} = 3 + 1$

Definição 16.7: Substituição em fórmula

Dadas $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ e $x \in X$ e $t \in T_\Sigma^X$, a fórmula $\varphi\{t/x\}$, que se obtém substituindo x por t em φ é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $\varphi\{t/x\} = \varphi$, para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $P \in SP_n$, com $n > 0$, então

$$P(t_1, \ldots, t_n)\{t/x\} = P(t_1\{t/x\}, \ldots, t_n\{t/x\})$$

- $(\varphi * \psi)\{t/x\} = \varphi\{t/x\} * \psi\{t/x\}$, para cada $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$;
- $(\forall x\, \varphi)\{t/x\} = \forall x\, \varphi$ e $(\exists x\, \varphi)\{t/x\} = \exists x\, \varphi$;
- $(\forall y\, \varphi)\{t/x\} = \forall y\, \varphi\{t/x\}$ e $(\exists y\, \varphi)\{t/x\} = \exists y\, \varphi\{t/x\}$, sendo $y \in X \setminus \{x\}$.

Termos por variáveis

Exemplos

Considere as variáveis x, y, z e a assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, com

- $r, s \in SF_1$;
- $P \in SP_1$ e $Q \in SP_2$.

Sejam $\varphi = \forall x(P(x) \to Q(x, s(y)))$ e $\psi = P(z) \wedge \exists z Q(r(z), x)$, $t = r(y)$ e $t' = s(z)$.

- $s(x)\{t/x\} = s(r(y))$;
- $\varphi\{t/y\} = \forall x P(x) \to Q(x, s(r(y)))$;
- $\varphi\{t/x\} = \varphi$;
- $\psi\{t/z\} = P(r(y)) \wedge \exists z Q(r(z), x)$;
- $\psi\{t'/x\} = P(z) \wedge \exists z Q(r(z), s(z))$.

Termos por variáveis

Cálculo recursivo:
$(P(z) \wedge \exists z Q(r(z), x))\{r(y)/z\} = P(r(y)) \wedge \exists z Q(r(z), x)$

$$
\begin{aligned}
(P(z) \wedge \exists z Q(r(z), x))\{r(y)/z\} &= \\
P(z)\{r(y)/z\} \wedge (\exists z Q(r(z), x))\{r(y)/z\} &= \\
P(z\{r(y)/z\}) \wedge \exists z Q(r(z), x) &= \\
P(r(y)) \wedge \exists z Q(r(z), x) &
\end{aligned}
$$

Termos por variáveis

Captura de variáveis livres

A definição anterior de substituição permite alterar o "sentido" das fórmulas.

- $\exists x\, P(f(x,y))$ tem significado diferente de $\exists x\, P(f(x,x))$, mas

$$(\exists x\, P(f(x,y)))\{x/y\} = \exists x\, P(f(x,x))$$

- Em $\forall x (P(x) \to Q(x,y))$ não se deve substituir o y por um termo que contenha x.

$$(\forall x (P(x) \to Q(x,y)))\{s(x)/y\} = \forall x (P(x) \to Q(x,s(x)))$$

Em geral, deve-se evitar que uma substituição torne uma variável livre noutra que fica muda.

Definição 16.8: Termo livre para variável numa fórmula

Dadas $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ e $x \in X$ e $t \in T_\Sigma^X$, o termo t diz-se *livre para x em φ*, se

- φ é uma fórmula atómica (predicado ou $\perp$);
- $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ com $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ e t livre para x em φ_1 e φ_2;
- $\varphi = \forall x\, \psi$ ou $\varphi = \exists x\, \psi$;
- $\varphi = \forall y\, \psi$ ou $\varphi = \exists y\, \psi$, sendo $y \in X \setminus \{x\}$, $y \notin V(t)$ e t livre para x em ψ.

Termo livre para variável numa fórmula

Observações

- Sempre que t seja livre para x em φ a substituição de x por t em φ não "captura" variáveis de t (distintas de x).
- Sempre que se referirem substituições *que não capturam variáveis*, estas consideram apenas termos livre para variável na fórmula em questão.

Lema 16.1

Se $\mathsf{V}(t) \cap \mathsf{VM}(\varphi) \neq \emptyset$ então t não é livre para qualquer variável na fórmula φ.

Apresenta-se a prova no fim.

Exemplos

Seja $\varphi = \exists y\, M(x, y)$.

- Se $t = s(y)$ então t não é livre para x em φ.

  Como $y \in VM(\varphi)$ a substituição de x por t em φ leva à captura da variável de t (o y).
- Se $t = s(x)$ ou mesmo $t = s(z)$ então t é livre para x em φ.

  Porque $\{x, z\} \cap VM(\varphi) = \emptyset$.
- Os termos $s(x)$, $s(y)$ e $s(z)$ são livre para y em φ.

  Porque $y \in VM(\varphi)$.

Lema 16.2

- Se φ é uma fórmula fechada, então para qualquer termo t e variável x tem-se que $\varphi\{t/x\} = \varphi$.
- O termo x é livre para x em qualquer fórmula.
- Se para dado termo t se tem que $V(t) = \emptyset$, então t é livre para qualquer variável em qualquer fórmula.
- Se para dado termo t e dada fórmula φ se tem que $\mathsf{V}(t) \cap \mathsf{VM}(\varphi) = \emptyset$, então t é livre para qualquer variável na fórmula φ.

Prova do lema

Definição de termo livre para variável em fórmula

O único caso relevante é quando a variável é x e $\varphi = \forall y\, \psi$ (ou $\varphi = \exists y\, \psi$). Então um termo t é livre para x em φ, se $y \notin \mathsf{V}(t)$ e t é livre para x em ψ.

Se para dado termo t e dada fórmula φ se tem que $\mathsf{V}(t) \cap \mathsf{VM}(\varphi) = \emptyset$, então t é livre para qualquer variável na fórmula φ

Seja x a variável. Prova-se por indução na estrutura da fórmula.

O único caso interessante é quando $\varphi = \forall y\, \psi$ (ou $\varphi = \exists y\, \psi$). Por hipótese, $\mathsf{V}(t) \cap \mathsf{VM}(\varphi) = \emptyset$; então (porque $y \in \mathsf{VM}(\varphi)$) tem-se que $y \notin \mathsf{V}(t)$. Como a hipótese implica também que $\mathsf{V}(t) \cap \mathsf{VM}(\psi) = \emptyset$, por hipótese de indução, t é livre para x em ψ, logo t é livre para x em φ.