Lógica Computacional

Aula Teórica 15: Sintaxe da Lógica de Primeira Ordem

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Necessidade de uma linguagem mais rica

Limitações da Lógica Proposicional

- Apenas compõe asserções com os operadores de negação, disjunção, conjunção e implicação.
- Trata declarações que não envolvam estes operadores como atómicas, por muito elaboradas que sejam.
- Não permite expressar constantes, propriedades, funções.
- Quer-se raciocinar sobre factos como:
  - $3 < 9$ ou $3^2 = 9$
  - $\forall n \in \mathbb{N}_0\ n \geq 0$ ou $\forall x, y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ (x^2 + y^2 = z^2)$
  - *Todo o homem é mortal* ou *Nenhum homem é mortal* ou *Algum homem é mortal* ou *Algum homem não é mortal*
  - *Qualquer estudante é mais novo que algum professor*
- A Lógica Proposicional representa estas asserções como básicas (um símbolo proposicional, p).

Lógica de Primeira Ordem

Ingredientes: os da Lógica Proposicional, mais

Termos

- Constantes: representam elementos concretos de conjuntos (ou universos).
  Exemplos: 3 (um natural), 1.5 (um racional), Sócrates (um homem)
- Variáveis: representam elementos arbitrários de conjuntos.
  Exemplos: n, m, x, y, x_1
- Funções: compõem constantes e variáveis com operadores para fazer determinado cálculo.
  Exemplos: Suc(n)=n+1, Quad(x)=x^2

Lógica de Primeira Ordem

Ingredientes: os da Lógica Proposicional, mais termos mais

Novas fórmulas

- Predicados: expressam propriedades (como *relações*). Exemplos: $2 = 1 + 1$, $2 > 3$, Mortal(Sócrates), Estudante(Pedro), Professor(António), Mais_novo(x,y)
- Fórmulas com quantificadores (universal e existencial): identificam todos ou alguns elementos de um conjunto com dada propriedade.
  - $\forall m\, Mortal(m)$ ou $\exists m\, \neg Mortal(m)$
  - $\forall x (Estudante(x) \to (\exists y (Professor(y) \wedge Mais\_novo(x, y))))$
  - $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (|x - a| < \delta\ \to |f(x) - b| < \varepsilon)$

Que símbolos usar?

Definição 15.1: Assinatura

Uma *assinatura de primeira ordem* é um par de conjuntos $\Sigma = (SF, SP)$ sendo:

- $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, onde cada SF_i é um conjunto de símbolos de *função* de aridade i e em SF os conjuntos são disjuntos dois a dois.
- $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, onde cada SP_i é um conjunto de símbolos de *predicado* de aridade i e em SP os conjuntos são disjuntos dois a dois.

Os símbolos em SF_0 chamam-se *constantes*;
Os símbolos em SP_0 chamam-se *símbolos proposicionais*.

Uma assinatura

Exemplo

- $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
  - $SF_0 = \{Zero\}$
  - $SF_1 = \{Suc\}$
  - $SF_2 = \{Plus\}$
  - $SF_i = \emptyset$, para todo o $i \geq 3$
- $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
  - $SP_1 = \emptyset$
  - $SP_2 = \{=, >, <\}$
  - $SP_i = \emptyset$, para todo o $i = 0$ ou $i \geq 3$

Predicados são relações, mas podem ser vistos como funções para $\{0, 1\}$.

Alfabeto

Definição 15.2: Alfabeto de primeira ordem sobre Σ e X

Dada uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ e um conjunto numerável X de *variáveis*, o *alfabeto de primeira ordem sobre* Σ *e* X, denotado por Alf^X_Σ, é constituido por:

- cada um dos elementos de SF_i, para cada $i \in \mathbb{N}_0$;
- cada um dos elementos de SP_i, para cada $i \in \mathbb{N}_0$;
- cada um dos elementos de X;
- o símbolo $\perp$ (falso, contradição ou absurdo);
- os conectivos disjunção, $\vee$, conjunção, $\wedge$ e implicação, $\rightarrow$;
- os quantificadores universal, $\forall$, e existencial, $\exists$;
- o símbolo , e os parênteses esquerdo e direito, (e).

Assume-se que $X \cap SF_i = \emptyset$ e $X \cap SP_i = \emptyset$, para cada $i \in \mathbb{N}_0$

Termos

Definição 15.3: Conjunto de termos induzidos por uma assinatura

O *conjunto de termos induzidos por* Alf^X_Σ, denotado por T^X_Σ, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- *CONST*: $c \in T^X_\Sigma$, para cada $c \in SF_0$;
- *VAR*: $x \in T^X_\Sigma$, para cada $x \in X$;
- *FUN*: se $t_1, \ldots, t_n \in T^X_\Sigma$ então $f(t_1, \ldots, t_n) \in T^X_\Sigma$ para cada $f \in SF_n$, com $n > 0$.

Exemplos

Considere-se a assinatura do exemplo anterior e assuma-se $x \in X$.

- Por *CONST*, tem-se que $Zero \in T^X_\Sigma$, pois, $Zero \in SF_0$.
- Como $x \in T^X_\Sigma$ (por *VAR*), então $Suc(x) \in T^X_\Sigma$ por *FUN*, pois $Suc \in SF_1$.

$Suc(Plus(x, Zero)) \in T_\Sigma^X$ é um termo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in X}{x \in T_\Sigma^X}\,(\mathrm{VAR}) \qquad \dfrac{Zero \in SF_0}{Zero \in T_\Sigma^X}\,(\mathrm{CONST}) \qquad Plus \in SF_2}{Plus(x, Zero) \in T_\Sigma^X}\,(\mathrm{FUN}) \qquad Suc \in SF_1}{Suc(Plus(x, Zero)) \in T_\Sigma^X}$$

Definição 15.4: conjunto F_Σ^X

Linguagem de primeira ordem induzida por Alf_Σ^X

A *linguagem das fórmulas de primeira ordem induzida por* Alf_Σ^X, denotada por F_Σ^X, é definida indutivamente pelas seguintes regras.

- *PROP*: $P \in F_\Sigma^X$, para cada $P \in SP_0$;
- *BOT*: $\perp \in F_\Sigma^X$;
- *PRED*: se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ então $P(t_1, \ldots, t_n) \in F_\Sigma^X$ para cada $P \in SP_n$, com $n > 0$;
- *DIS*: se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $(\varphi \vee \psi) \in F_\Sigma^X$;
- *CON*: se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $(\varphi \wedge \psi) \in F_\Sigma^X$;
- *IMP*: se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $(\varphi \to \psi) \in F_\Sigma^X$;
- *UNIV*: se $x \in X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$ então $(\forall x\, \varphi) \in F_\Sigma^X$;
- *EXIST*: se $x \in X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$ então $(\exists x\, \varphi) \in F_\Sigma^X$.

Exemplos de expressões que não são fórmulas de primeira ordem

Sejam x é uma variável, f uma função, P e Q predicados e ψ uma fórmula.

- Funções não são fórmulas:

$$Suc(x) \text{ e } (Suc(Zero) \vee Suc(Suc(Zero)))$$

  não são fórmulas de primeira ordem.
- Argumentos das funções e dos predicados são termos:

$$Q(f(P(x))),\ P(\psi),\ \text{ e } P(Q(x))$$

  não são fórmulas de primeira ordem.
- Quantificam-se variáveis, não funções, predicados ou fórmulas:

$$\forall x \forall f.P(f(x)),\ \forall x \forall P.P(Q(x)),\ \text{e } \forall \psi(\psi \vee P(x))$$

  não são fórmulas de primeira ordem.

O que representam os termos e fórmulas?

- Constantes referem entidades concretas.
- Variáveis referem entidades arbitrárias.
- Funções expressam cálculo.
- Relações expressam predicados (propriedades).
- Quantificador universal expressa uma asserção sobre todas as entidades (de um conjunto).
  Captura ideias como "todo", "qualquer", "cada um", etc.
- Quantificador existencial expressa uma asserção sobre algumas entidades (de um conjunto).
  Captura ideias como "algum", "pelo menos um", "existe um", ...

Fórmulas são asserções sobre as entidades representadas pelos termos.

Da linguagem natural para lógica de primeira ordem

Exemplos

- "O João é uma criança" escreve-se $C(\text{João})$;
  "A Ana é mãe do João" escreve-se $M(\text{Ana},\text{João})$;
  "O João é mais novo que a Ana" escreve-se $N(\text{João},\text{Ana})$;
- "Qualquer criança é mais nova que a sua mãe" escreve-se

$$\forall x\, \forall y\, (C(x) \land M(y,x)) \rightarrow N(x,y)$$

- "A função f é sobrejectiva" escreve-se

$$\forall y\, \exists x\, f(x) = y$$

- "O conjunto tem pelo menos três elementos diferentes" escreve-se

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (\neg(x = y) \land \neg(x = z) \land \neg(y = z))$$

Funções ou predicados: uma questão de escolha

"Os filhos de meu pai são meus irmãos"

- "Pai" como predicado.
  Dada uma assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, com
  - $eu \in SF_0$
  - $SP_2 = \{F, I, P\}$

  obtém-se a formulação

$$\forall x \forall y((P(x, eu) \wedge F(y, x)) \rightarrow I(y, eu))$$

- "Pai" como função ("Pai de" é uma relação unívoca).
  Dada uma assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, com
  - $eu \in SF_0$ e $P \in SF_1$
  - $SP_2 = \{I, F\}$

  obtém-se a formulação

$$\forall x(F(x, P(eu)) \rightarrow I(x, eu))$$