Lógica Computacional

Aula Teórica 13: Dedução Natural em Lógica Proposicional

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Um sistema dedutivo

Objectivo

Determinar a validade de raciocínios (ou de fórmulas) simplesmente por manipulação sintáctica dos símbolos que ocorrem nas fórmulas (sem recorrer à semântica).

Meio: sistema dedutivo

Estabelece-se um conjunto de regras (ditas de prova ou de inferência) que permitam inferir novas fórmulas a partir de fórmulas dadas ou previamente obtidas. As regras que não recorrem a hipóteses (outras fórmulas previamente provadas) chamam-se axiomas

Provas

Uma prova é uma sequência de fórmulas, sendo

- as primeiras as hipóteses (pode ser o conjunto vazio);
- cada uma das que não é uma hipótese foi obtida por aplicação de uma regra, eventualmente usando fórmulas anteriores (na sequência) como hipóteses dessa regra;
- a última fórmula da sequência é a conclusão desejada.

Notação

Sendo $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ um conjunto de hipóteses (com $n \geq 0$) e ϕ uma conclusão a provar, escreve-se

$$\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \phi$$

se a partir das hipóteses $\phi_1, \ldots, \phi_n$ se consegue construir uma prova para ϕ.

Notar

Terminologia

- Se se prova $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \phi$ então ϕ diz-se consequência do conjunto de hipóteses;
- Se se prova $\emptyset \vdash \phi$ então ϕ diz-se teorema do sistema dedutivo (e escreve-se $\vdash \phi$).

Propriedades de um sistema de prova

- *Correcção*: só permite derivar provas de tautologias e consequências semânticas
  - Se $\vdash \phi$ então $\models \phi$
  - Se $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \phi$ então $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \phi$
- *Completude*: permite derivar provas de todas as tautologias e todas as consequências semânticas
  - Se $\models \phi$ então $\vdash \phi$
  - Se $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \phi$ então $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \phi$

A ideia

Provas como árvores etiquetadas

- Uma prova ou inferência é apresentada em árvore, dita de dedução ou derivação.
- Cada árvore é construida a partir de árvores singulares (ou folhas) utilizando-se as regras de inferência.
- Obtém-se um novo nível da árvore por aplicação de uma regra de inferência. Cada conectivo tem duas regras associadas (de introdução e de eliminação desse conectivo), excepto o falso ($\perp$) que pode apenas ser eliminado.
- A etiquetas dos nós são fórmulas.
  - As fórmulas nas folhas são as hipóteses, e têm associadas marcas (números inteiros); A hipóteses distintas devem-se associar marcas distintas.
  - A fórmula na raíz é a conclusão da prova. Diz-se que a árvore é uma derivação dessa fórmula.

Análise do conectivo $\perp$

Se (eventualmente) se considera por hipótese $\neg\varphi$ e se deriva (eventualmente recorrendo a outras hipóteses) o absurdo, a hipótese (se usada) era falsa, e provou-se φ.

Regra do absurdo

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^m \\ \mathcal{D} \\ \perp\end{array}}{\varphi}\ (\perp, m)$$

A marca *m* associada à justificação (etiqueta) da regra:

1. aparece associada a uma ou mais hipóteses abertas correspondentes à fórmula $\neg\varphi$; ou
2. é uma marca nova, *i.e.*, que não ocorre na árvore (e então φ não surge como hipótese aberta na árvore).

Análise do conectivo $\wedge$

- Introdução: para concluir $\varphi \wedge \psi$ é preciso ter provado cada um deles
- Eliminação: se se provou $\varphi \wedge \psi$ pode-se concluir qualquer um deles

Regras da conjunção

$$\frac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \varphi & \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}\,(\wedge_I) \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}\,(\wedge_{E_d}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\psi}\,(\wedge_{E_e})$$

Análise do conectivo $\rightarrow$

- Introdução: se eventualmente fixando por hipótese φ se consegue derivar ψ, então provou-se que $\varphi \rightarrow \psi$
- Eliminação: se se provou φ e $\varphi \rightarrow \psi$, pode-se concluir ψ

Regras da implicação

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^m \\ \mathcal{D} \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow_{I,m}) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi}\ (\rightarrow_E)$$

A marca *m* associada à justificação (etiqueta) da regra $\rightarrow_{I,m}$:

1. aparece associada a uma ou mais hipóteses abertas correspondentes à fórmula φ; ou
2. é uma marca nova, *i.e.*, que não ocorre na árvore (e então φ não surge como hipótese aberta na árvore).

Análise do conectivo $\vee$

Tendo-se provado φ (ou ψ), tem-se $\varphi \vee \psi$

Regras da disjunção: introdução

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_{I_d}) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \psi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_{I_e})$$

Análise do conectivo $\vee$

Tendo-se provado $\varphi_1 \vee \varphi_2$, para concluir algo (*e.g.*, ψ) tem que se raciocinar por casos: se fixando eventualmente por hipótese cada um (φ_1 e φ_2) se consegue sempre derivar ψ, pode-se concluir ψ

Regras da disjunção: eliminação

$$\dfrac{\begin{array}{c} \\ \mathcal{D}_1 \\ \varphi_1 \vee \varphi_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi_1]^m \\ \mathcal{D}_2 \\ \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi_2]^n \\ \mathcal{D}_3 \\ \psi \end{array}}{\psi} \ (\vee_E, m, n)$$

As marcas m e n associadas à justificação (etiqueta) da regra:

1. são distintas se as fórmulas φ_1 e φ_2 são distintas;
2. m (resp. n) aparece associada a uma ou mais hipóteses abertas correspondentes à fórmula φ_1 (resp. φ_2) na árvore $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$); ou é uma marca nova.

$\{\neg p \to q\} \vdash \neg q \to p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\neg p \to q)^1 \qquad (\neg p)^2}{q}\,(\to_E) \qquad (\neg q)^3}{\bot}\,(\to_E)}{p}\,(\bot, 2)}{\neg q \to p}\,(\to_I, 3)$$

$\vdash p \lor \neg p$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p^1}{p \lor \neg p}\,(\lor_{I_d}) \qquad \neg(p \lor \neg p)^2}{\bot}\,(\to_E)}{\neg p}\,(\to_I, 1)}{p \lor \neg p}\,(\lor_{I_e}) \qquad \neg(p \lor \neg p)^2}{\bot}\,(\to_E)}{p \lor \neg p}\,(\bot, 2)
$$