Lógica Computacional

Aula Teórica 11: Resolução para Lógica Proposicional

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Como determinar a natureza de uma fórmula em FNC?

Verificação semântica e axiomática

- Se FNC(φ) então verificar $\models \varphi$ é simples: demora no máximo um tempo proporcional ao número de símbolos proposicionais da fórmula.
- Por via semântica usa-se o Lema da validade da disjunção.
- Como fazer automaticamente provas axiomáticas?
- Há métodos universais para determinar se dada fórmula é contraditória ou mesmo possível?

Sistema formal de prova de validade

Regras

Como a equivalência lógica é uma congruência, pode-se simplificar uma fórmula na FNC usando axiomas de equivalência, incluindo:

- leis de idempotência: $L \vee L \equiv L$ e $C \wedge C \equiv C$;
- leis do elemento neutro: $L \vee \perp \equiv L$ e $C \wedge \top \equiv C$;
- Transitividade da implicação:
  $(L_1 \rightarrow L_2) \wedge (L_2 \rightarrow L_3) \equiv (L_1 \rightarrow L_3)$
- Substitutividade.

Como funciona o sistema

- Converte-se uma fórmula para FNC.
- Simplifica-se usando axiomas de equivalência.
- Analisa-se o resultado obtido para determinar a natureza da fórmula.

Cláusulas

Disjunções como conjuntos

- Chama-se *cláusula* a uma disjunção de literais.
- Uma cláusula $L_1 \vee \ldots \vee L_n$, com $n \geq 0$, pode ser vista como o conjunto: $\bigcup_{i=1}^{n}\{L_i\} = \{L_1, \ldots, L_n\}$.
- O conjunto vazio denota $\perp$ (elemento neutro da disjunção): em vez de $\{\perp\}$ escreve-se simplesmente $\emptyset$; logo, a cláusula $\perp \vee p$ é simplesmente representada por $\{p\}$.

Propriedades

- Lema 11.1: Toda a cláusula determina univocamente um conjunto de literais.
- O recíproco não é verdadeiro: o conjunto $\{L_1, L_2\}$ pode resultar da fórmula $L_1 \vee L_2$, da fórmula $L_2 \vee L_1$, da fórmula $(L_1 \vee L_2) \vee L_1$, da fórmula $L_1 \vee (L_2 \vee L_1)$, etc.

Cláusulas como conjuntos

Lema 11.2

São equivalentes cláusulas que determinam o mesmo conjunto.

Esboço de prova

Os conjuntos não têm ordem nem repetições. Há 3 situações em que cláusulas sintaticamente diferentes geram o mesmo conjunto:

1. Numa um dado literal ocorre mais vezes do que na outra — pela lei da idempotência são equivalentes.
2. Pelo menos um literal ocorre numa cláusula numa posição diferente da que ocorre na outra — pela lei da comutatividade são equivalentes.
3. Os literais estão associados nas cláusulas de forma diferente — pela lei da associatividade são equivalentes.

Como $\perp$ é a cláusula vazia, pode-se apagá-lo (vê-se a cláusula como a união de cláusulas singulares, uma para cada literal).

Conjuntos de cláusulas

Fórmulas como conjuntos de cláusulas

- Uma fórmula em FNC é um conjunto de cláusulas.
- Se $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} C_i$ sendo cada C_i uma cláusula, φ é representada (univocamente) pelo conjunto $\bigcup_{i=1}^{n}\{C_i\} = \{C_1, \ldots, C_n\}$.
- O conjunto vazio denota $\top$ (elemento neutro da conjunção): em vez de $\{\top\}$ escreve-se simplesmente $\emptyset$; logo, a fórmula $\top \wedge (p \vee \bot)$ é representada por $\emptyset \cup \{\{p\} \cup \emptyset\} = \{\{p\}\}$.
- Exemplo: $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (r \vee s) \wedge \neg p \wedge (\neg q \vee \neg s)$ é univocamente representada por $\{\{p, q, \neg r\}, \{r, s\}, \{\neg p\}, \{\neg q, \neg s\}\}$.

Lema 11.3

Se duas fórmulas em FNC determinam o mesmo conjunto de cláusulas então são equivalentes.

Definição 11.1: Resolvente

Dadas duas cláusulas C_1 e C_2 tal que para alguma fórmula atómica φ se tem $\varphi \in C_1$ e $\neg\varphi \in C_2$, chama-se *resolvente* à cláusula $R = (C_1 \setminus \{\varphi\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg\varphi\})$.

Exemplo

Sejam $C_1 = \{p, \neg q, r\}$ e $C_2 = \{q, \neg r, s\}$;

- um resolvente destas cláusulas é a cláusula $\{p, q, \neg q, s\}$;
- outro resolvente é a cláusula $\{p, r, \neg r, s\}$.

Regras de prova

- Uma fórmula $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} C_i$ em FNC é possível, se não é contraditória e algum C_i é uma fórmula possível.
- Se duas cláusulas são fórmulas possíveis, então um seu resolvente é também uma fórmula possível.

Correcção do sistema dedutivo

Lema 11.4: A regra do resolvente é correcta

Seja L um literal positivo e C e D cláusulas.

$$(L \lor C) \land (\neg L \lor D) \models C \lor D$$

Prova por dedução natural. Seja $\mathcal{D}$ a seguinte árvore

$$\dfrac{\dfrac{((L \lor C) \land (\neg L \lor D))^1}{\neg L \lor D}\,(\land_{E_e}) \qquad \dfrac{\dfrac{L^2 \qquad \neg L^4}{\bot}\,(\to_E)}{C \lor D}\,(\bot, 6) \qquad \dfrac{D^5}{C \lor D}\,(\lor_{I_e})}{C \lor D}\,(\lor_E, 4, 5)$$

$$\dfrac{\dfrac{((L \lor C) \land (\neg L \lor D))^1}{L \lor C}\,(\land_{E_d}) \qquad \mathcal{D} \qquad \dfrac{C^3}{C \lor D}\,(\lor_{I_d})}{C \lor D}\,(\lor_E, 2, 3)$$

Como se provou $(L \lor C) \land (\neg L \lor D) \vdash C \lor D$, o resultado desejado sai pela correcção do sistema de dedução natural.

Algoritmo de Resolução: definição

Definição 11.2: Cálculo do ponto fixo dos resolventes

Seja $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} C_i$ uma fórmula em FNC.

Define-se a função Res de geração de resolventes da seguinte forma:

- $\mathsf{Res}^0(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{n}\{C_i\}$.
- Para qualquer $n > 0$ define-se $\mathsf{Res}^n(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{Res}^{n-1}(\varphi) \cup \{R \mid R \text{ é resolvente de duas cláusulas de } \mathsf{Res}^{n-1}(\varphi)\}$.
- $\mathsf{Res}^*(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \geq 0} \mathsf{Res}^n(\varphi)$.

Lema 11.5

A função Res é monótona crescente.

Proposição 11.1

Para dado φ, o conjunto $\mathsf{Res}^*(\varphi)$ é único.

Exemplificação do cálculo dos resolventes

Seja $\varphi = (p \vee p \vee q) \wedge \top \wedge (r \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \bot) \wedge \neg p$

A fórmula é composta pelas seguintes cláusulas:

$C_1 = \{p, q\},\ C_2 = \emptyset, C_3 = \{r, \neg q\},\ C_4 = \{\neg p\} \cup \emptyset = \{\neg p\} = C_5$

Por definição, como se convencionou que $\{C_2\} = \emptyset$,

$\text{Res}^0(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{5}\{C_i\} = \{\{p, q\}, \{r, \neg q\}, \{\neg p\}\}$

$\text{Res}^1(\varphi) = \text{Res}^0(\varphi) \cup \{\{p, r\}, \{q\}\}$

$\text{Res}^2(\varphi) = \text{Res}^1(\varphi) \cup \{\{r\}\}$

$\text{Res}^n(\varphi) = \text{Res}^2(\varphi)$, para qualquer $n > 2$

Lema 11.6

Para toda a fórmula φ em FNC existe um $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathrm{Res}^*(\varphi) = \mathrm{Res}^m(\varphi)$.

Esboço de prova

As fórmulas são conjuntos finitos de símbolos: se $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} C_i$ então n é finito e cada C_i é um conjunto finito. Logo, $\mathrm{Res}^0(\varphi)$ é finito; como cada resolvente de duas cláusulas é finito (cardinal menor ou igual à soma dos cardinais das cláusulas menos 2), facilmente se prova por indução que para qualquer n é finito $\mathrm{Res}^n(\varphi)$. Logo, $\mathrm{Res}^*(\varphi)$ é finito, e existe um m tal que $\mathrm{Res}^{m+i}(\varphi) = \mathrm{Res}^m(\varphi)$, com $i \geq 1$.

Algoritmo de Resolução

Teorema 11.1

Dada $\varphi \in H_P$ com FNC(φ), $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$ se e só se $\varphi \equiv \bot$.

Prova

Pelo lema anterior, existe um $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $\text{Res}^*(\varphi) = \text{Res}^m(\varphi)$. Prova-se então o resultado analisando o m.

- Caso $m = 0$. Note-se que $\emptyset \in \text{Res}^0(\varphi)$ se e só se para algum i se tem $C_i = \bot$, e como $\bot$ é elemento absorvente da conjunção, φ é contraditória.
- Caso $\emptyset \notin \text{Res}^m(\varphi)$ mas $\emptyset \in \text{Res}^{m+1}(\varphi) = \text{Res}^m(\varphi) \cup R$, sendo R um resolvente de duas cláusulas em $\text{Res}^m(\varphi)$. Então, $\emptyset \in \text{Res}^{m+1}(\varphi)$ se e só se $R = \emptyset$. Como R representa $\bot$, e $\bot$ é elemento absorvente da conjunção, φ é contraditória.

Uma fórmula contraditória

Se a fórmula é contraditória, consegue-se, calculando resolventes das suas cláusulas, derivar o conjunto $\emptyset$. Não vale a pena calcular explicitamente Res*.

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge (p \vee q \vee r)$

Dedução	Justificação
$\{p, q, \neg r\}$	Cláusula C_1
$\{p, q, r\}$	Cláusula C_4
$\{p, q\}$	Resolvente de C_1 e C_4
$\{p, \neg q\}$	Cláusula C_2
$\{p\}$	Resolvente de $\{p, q\}$ e C_2
$\{\neg p\}$	Cláusula C_3
$\emptyset$	Resolvente de $\{p\}$ e C_3

Pela proposição anterior conclui-se que a fórmula é contraditória.

Uma fórmula possível

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee q) \wedge (r \vee s) \wedge \neg p \wedge (\neg q \vee \neg s)$

Pelo Lema da disjunção de literais, a fórmula não é válida.

A fórmula é composta pelas seguintes cláusulas:
$C_1 = \{p, q\},\ C_2 = \{r, s\}, C_3 = \{\neg p\},\ C_4 = \{\neg q, \neg s\}$

Por definição,

$\text{Res}^0(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{4}\{C_i\} = \{\{p, q\}, \{r, s\}, \{\neg p\}, \{\neg q, \neg s\}\}$

$\text{Res}^1(\varphi) = \text{Res}^0(\varphi) \cup \{\{q\}, \{p, \neg s\}, \{r, \neg q\}\}$

$\text{Res}^2(\varphi) = \text{Res}^1(\varphi) \cup \{\{p, r\}, \{r\}, \{\neg s\}\}$

$\text{Res}^n(\varphi) = \text{Res}^2(\varphi)$, para qualquer $n > 2$

Como $\emptyset \notin \text{Res}^*(\varphi)$, a fórmula não é contraditória. Logo, é possível.
Uma valoração que satisfaz a fórmula atribui o valor 1 aos literais em cláusulas singulares.