
CAPÍTULO 5

Abordagem Interactiva ao Problema de Caminho Mais Curto Multiobjectivo

1. Introdução

Neste capítulo é apresentada uma abordagem ao problema de caminho mais curto bi e tri-objectivo, que tira partido da interacção AD-computador, de forma a determinar a “melhor” solução de compromisso do problema, de acordo com as preferências do AD. Desta forma, é possível chegar a uma solução final minimizando o esforço computacional e o esforço de tratamento da informação imposta ao AD, uma vez que não há necessidade de determinar todas as soluções não dominadas do problema. De facto, por um lado, logo que seja apresentada ao AD uma solução não dominada que o satisfaça totalmente, deixa de ser necessário continuar com a pesquisa de mais soluções (mesmo correndo-se o risco de poder existir uma outra que o satisfaça ainda mais); por outro lado, há a possibilidade de o AD dirigir a pesquisa para regiões onde este considere que se localizam soluções mais de acordo com as suas preferências, eliminando outras por as considerar sem interesse.

Como existe interacção entre o AD e o computador, em que este irá aproveitar e seguir as indicações do primeiro, terá que ser facultada ao AD certa informação relevante, que servirá de auxílio quer para indicar futuras direcções de pesquisa de outras soluções não dominadas, quer para eliminar regiões que considere menos interessantes.

Toda esta informação será apresentada servindo-se dos aspectos gráficos proporcionados pelo WINDOWS (95 e NT). Para tal, recorreu-se à linguagem de programação por objectos denominada DELPHI PASCAL da BORLAND.

Os gráficos utilizados representam as soluções no espaço dos objectivos, mostrando as soluções não dominadas do problema que vão sendo encontradas. Desta forma, a cada tipo de problema está associado um tipo diferente de gráfico.

No problema bi-objectivo, o gráfico utilizado para representar as soluções consiste num sistema de dois eixos ($F1$ e $F2$), onde cada solução é representada por um ponto (x, y) — x e y são os valores dos objectivos 1 e 2, respectivamente, relativamente àquela solução. Cada eixo tem duas marcas correspondentes aos valores mínimo e máximo não dominados que cada função objectivo pode atingir (Fig. 1.(a)). Por outro lado, todas as soluções são representadas com diferentes cores, para que cada solução seja também identificada pela cor em todos os gráficos onde esteja representada¹.

Para o problema tri-objectivo, as soluções são representadas num gráfico com três eixos ($F1$, $F2$ e $F3$), onde o ângulo entre quaisquer dois eixos é de 120 graus e o ponto central corresponde à solução ideal. Cada solução é representada por um triângulo com uma determinada cor, cujos vértices se situam nos respectivos eixos e correspondem às diferenças, normalizadas em cada dimensão, entre os valores dos objectivos e os valores mínimos destes (solução ideal) — Fig. 1.(b). Por exemplo, na Fig. 1.(b) a solução ideal tem os valores (40, 40, 140) e a solução representada (rendilhado) tem (320, 1220, 270); portanto, a solução marca 280 (= 320 - 40), 1180 (= 1220 - 40) e 130 (= 270 - 140) unidades nos eixos $F1$, $F2$ e $F3$, respectivamente.

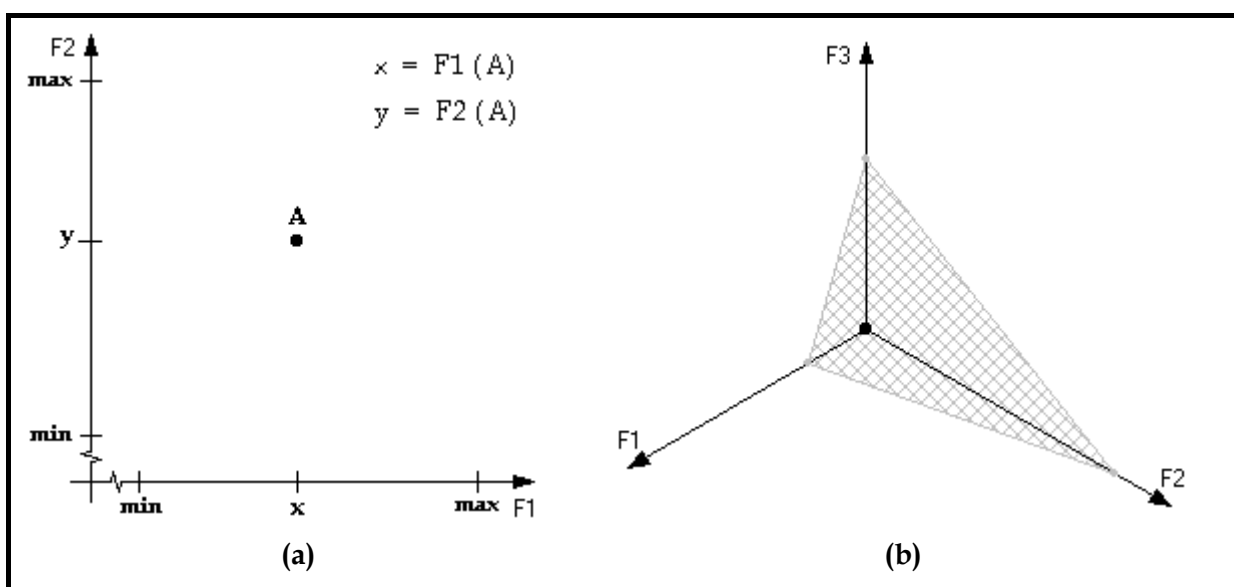


Fig. 1 – Gráficos para representar as soluções nos problemas (a) bi e (b) tri-objectivo.

¹ Porém, nalguns gráficos apresentados nesta tese, as cores são omitidas por não existir ambiguidade.

2. Definição dos problemas

Em qualquer dos problemas, podem ser determinadas soluções não dominadas otimizando uma função escalar que é uma combinação convexa de h (2 ou 3) objectivos, onde o coeficiente de custo associado a cada arco (i, j) , c_{ij} , é uma soma pesada não negativa de coeficientes de custo relativos a cada função objectivo. Ou seja, uma solução (vértice) não dominada pode ser obtida resolvendo o seguinte problema :

$$[P1] \quad \text{Minimizar} \quad Z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a

$$\sum_{j \in N} x_{sj} = 1 \quad (1)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} - \sum_{k \in N} x_{jk} = 0, \quad \forall j \in N - \{s, t\} \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N} x_{it} = 1 \quad (3)$$

$$x_{ij} = 0, 1 \quad \forall i, j \in N \quad (4)$$

com $c_{ij} = \sum_{k=1}^h \lambda_k c_{ij}^k$, onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h) \in \Lambda = \{ \lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, h; \sum_{k=1}^h \lambda_k = 1 \}$ e $h \in \{2, 3\}$.

Refira-se, no entanto, que existem combinações convexas particulares para as quais as soluções resultantes não são estritamente não dominadas. Estas situações ocorrem sempre que exista um óptimo alternativo para qualquer $\lambda_k = 0$ (por exemplo, quando se determinam os óptimos individuais das h funções objectivo).

No problema bi-objectivo, esta situação surge apenas ao determinar a solução óptima de uma das funções objectivo, quando existe mais do que uma solução óptima para esse objectivo. A forma de ultrapassar esta questão, consiste em determinar todas as soluções óptimas alternativas e escolher a não dominada, utilizando o valor do outro objectivo associado a cada uma dessas soluções. Neste caso, apenas existe uma solução estritamente não dominada, pois o valor da função objectivo a otimizar é o mesmo para todas elas, sendo não dominada a solução que tiver menor valor relativamente ao outro objectivo.

Se a solução óptima do problema P1 é única, então corresponde a um caminho vértice não dominado. Desta forma, na resolução do problema P1, apenas se determinam vértices. Estas soluções pertencem ao Contorno Convexo de um conjunto de soluções não dominadas, no espaço das funções objectivo com h dimensões.

Uma solução não dominada localizada no interior do Invólucro Convexo (isto é, que não é vértice), não pode ser obtida desta forma, uma vez que é dominada por uma combinação convexa de vértices, e assim, não pode ser solução de P1 (não existe $\lambda \in \Lambda$ que defina um hiperplano de suporte para ela). Por esta razão, apesar de serem não dominadas, são geralmente denominadas por soluções convexamente dominadas ou soluções não suportadas, as quais se encontram dentro das denominadas Zonas de Desníveis de Dualidade. Mas, e uma vez que elas são efectivamente não dominadas, devem ser consideradas como potenciais soluções de compromisso e, conseqüentemente, o método de procura deve adaptar-se ao seu cálculo. Estas soluções são, então, determinadas através de um algoritmo para determinar os k caminhos mais curtos.

O algoritmo para determinar os k caminhos mais curtos utilizado na abordagem aqui apresentada é a versão mais recente do MPS, que foi desenvolvido por Martins et al. [20] (ver secção 4.3 do Capítulo 4). A escolha deste algoritmo deve-se ao facto de ser muito recente (1997) e muito eficiente. Este algoritmo calcula 500 000 trajectos, em redes euclidianas não orientadas com 10 000 nós e 100 000 arcos, em cerca de 0.35 segundos de tempo CPU (em redes orientadas determina 600 000 trajectos em cerca de 0.15 segundos). Em redes completas não orientadas com 1 000 nós, este algoritmo determina 580 000 trajectos em cerca de 2.1 segundos de tempo CPU (em redes orientadas, determina 780 000 trajectos em cerca de 2.01 segundos).

A abordagem proposta apresenta, para qualquer dos problemas (bi e tri-objectivo), dois métodos diferentes para determinar a “melhor” solução de compromisso :

- a) analisando todo o espaço dos objectivos, determinando soluções segundo uma determinada direcção de pesquisa,
- b) analisando o Contorno Convexo e as Zonas de Desníveis de Dualidade.

No primeiro método, o passo inicial consiste em determinar a direcção de pesquisa de soluções. No passo principal, cada iteração consiste em determinar uma solução de acordo com aquela direcção de pesquisa.

O segundo método é composto por duas fases, consoante se pretenda determinar :

- 1^a) soluções não dominadas que pertencem ao Contorno Convexo,
- 2^a) soluções não dominadas que pertencem às Zonas de Desníveis de Dualidade.

3. As soluções dos problemas

As categorias de soluções dos problemas são dominada, não dominada do Contorno Convexo (vértice) e não dominada das Zonas de Desníveis de Dualidade. Por outro lado, introduzimos dois conceitos que se aplicam aos vértices de um problema multiobjectivo, que são o de **vértices adjacentes** e **definitivamente adjacentes**. Num problema com h objectivos, a adjacência é verificada entre combinações de h vértices.

Diz-se que h vértices são **adjacentes**, se abaixo do hiperplano definido pelos h vértices ainda não foi encontrado qualquer vértice, mas que pode existir (uma das formas de verificar se existe algum vértice nessas circunstâncias, é resolver o problema P1, cujos pesos correspondem ao gradiente daquele hiperplano). Aqueles h vértices dizem-se **não adjacentes** se existe pelo menos outro vértice abaixo do hiperplano definido pelos h vértices.

Diz-se que h vértices são **definitivamente adjacentes**, se já se tem a garantia que não existe qualquer vértice abaixo do hiperplano definido pelos h vértices (pode-se verificar, resolvendo o problema P1, em que os pesos utilizados correspondem ao gradiente do hiperplano referido, e não se encontrar qualquer novo vértice).

A partir destes dois conceitos, uma Zona de Desnível de Dualidade é completamente caracterizada por h vértices definitivamente adjacentes, num problema com h objectivos.

3.1. Problema bi-objectivo

Diz-se que **dois** vértices são *adjacentes*, se abaixo da recta que passa por dois vértices não se conhece qualquer vértice (mas que pode existir), e diz-se que são *definitivamente adjacentes*, se já se tem a certeza que não existe qualquer vértice abaixo daquela recta. Ou seja, **dois vértices** são *definitivamente adjacentes*, se ao resolver-se o problema P1 (fazendo $h=2$), cujos pesos correspondem ao gradiente da recta que passa por esses dois vértices, não for encontrado qualquer novo vértice.

Relativamente às definições de Contorno Convexo e de Zona de Desnível de Dualidade, o primeiro é composto por todas as combinações de h vértices definitivamente adjacentes, e a segunda é caracterizada por dois vértices definitivamente adjacentes. Desta forma, a Zona de Desnível de Dualidade caracterizada pelos vértices x e y , consiste na região representada por um triângulo, cujos vértices são : x , y e o ponto construído à custa dos valores máximos de cada objectivo relativamente a x e y (regiões a cheio na Fig. 2).

Na Fig. 2 encontram-se ilustrados os vários tipos de soluções para o problema bi-objectivo : dominada e não dominada (do Contorno Convexo e de Zonas de Desníveis de Dualidade), bem como a solução ideal.

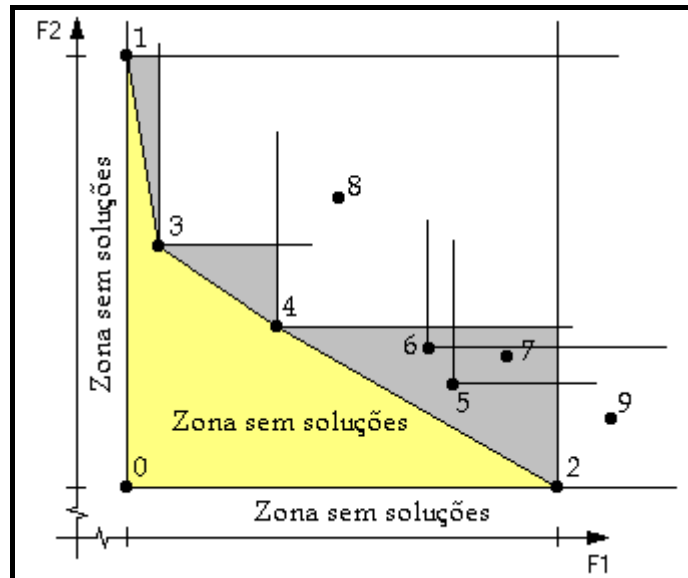


Fig. 2 – Bi-objectivo : tipos de soluções.

As soluções 1, 2, 3 e 4 pertencem ao Contorno Convexo. As soluções 1 e 2 foram determinadas otimizando, separadamente, as funções objectivo 1 e 2, respectivamente. A solução 3 foi determinada otimizando a função escalar cujos pesos correspondem ao gradiente da recta que passa pelas soluções 1 e 2. A solução 4 foi encontrada ao otimizar-se a função escalar cujos pesos correspondem ao gradiente da recta que passa pelas soluções 2 e 3.

Desta forma, os vértices 1 e 2 deixaram de ser adjacentes entre si (foram-no quando eram únicas), porque a partir deles foi determinado o vértice 3. Da mesma forma, os vértices 2 e 3 também deixaram de ser adjacentes entre si. Por outro lado, (1, 3), (3, 4) e (2, 4) são pares de vértices definitivamente adjacentes entre si, uma vez que a partir deles não foram determinados quaisquer vértices. Por esta razão, estes pares de vértices definem Zonas de Desníveis de Dualidade.

As soluções 5, 6 e 7 pertencem à Zona de Desnível de Dualidade definida pelas soluções 2 e 4. No entanto, enquanto que as soluções 5 e 6 são não dominadas, a solução 7 é dominada (pela 5).

As soluções 8 e 9 são dominadas, pois nem pertencem ao Contorno Convexo, nem a qualquer Zona de Desnível de Dualidade (a 8 é dominada pelas soluções 3 e 4 e a 9 pela solução 2).

A solução 0 é a solução ideal, que optimizaria simultaneamente todas as funções objectivo, mas que não é admissível. A *solução ideal* obtém-se considerando os valores das soluções que optimizam separadamente cada função objectivo, mas sem ter associado qualquer caminho, já que tal solução geralmente é não admissível (quando admissível é a única não dominada).

3.2. Problema tri-objectivo

Diz-se que **três** vértices são *adjacentes*, se abaixo do plano que contém os três vértices não se conhece qualquer vértice (mas que pode existir), e diz-se que são *definitivamente adjacentes*, se já se tem a garantia que não existe qualquer vértice abaixo do referido plano. A forma de verificar se existe qualquer vértice abaixo do plano que contém aqueles três vértices, consiste em resolver o problema P1 (fazendo $h=3$), cujos pesos utilizados correspondem exactamente ao gradiente do plano que contém aqueles três vértices.

Quando uma das componentes do gradiente do plano que contém os três vértices é negativa, o peso correspondente é feito nulo (o que significa um relaxamento do gradiente) para evitar a obtenção de soluções dominadas. Contudo, dada a perturbação do gradiente original assim introduzido, não pode ser garantido que, usando uma função objectivo soma ponderada com esse conjunto de pesos que não conduza a qualquer vértice, este não exista abaixo do plano definido por aqueles vértices.

A definição de Contorno Convexo utilizada no problema bi-objectivo, também é válida neste problema, isto é, o conjunto de todos os vértices do problema.

No que respeita à definição de Zona de Desnível de Dualidade já isso não acontece, apesar da sua caracterização ser semelhante, isto é, por três vértices definitivamente adjacentes. No entanto, definimos uma Zona de Desnível de Dualidade da seguinte forma : uma solução não dominada x pertence à Zona de Desnível de Dualidade definida pelos vértices A, B e C ($[A, B, C]$), se se encontrar no interior da pirâmide cujos vértices são A, B, C e P, em que P é o ponto construído com os valores máximos de cada função objectivo relativamente às soluções A, B e C (Fig. 3).

Por exemplo, as soluções $A = (1600, 40, 180)$, $B = (320, 1220, 270)$ e $C = (860, 1110, 150)$ e o ponto $P = (1600, 1220, 270)$ formam uma pirâmide, a qual define uma Zona de Desnível de Dualidade representada na Fig. 3. Desta forma, qualquer solução não dominada que se encontre no interior desta pirâmide, pertence a esta Zona de Desnível de Dualidade.

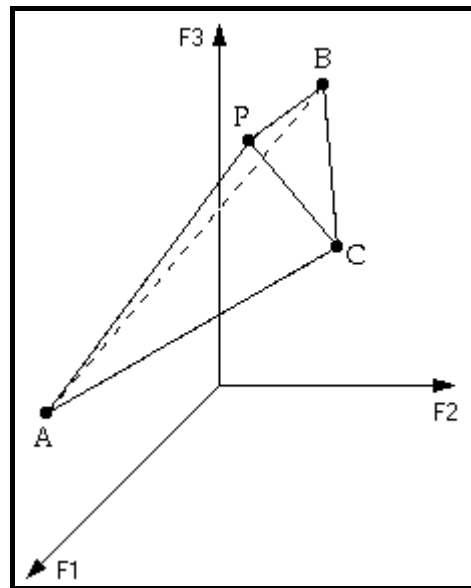


Fig. 3 – Tri-objectivo : representação dum Zona de Desnível de Dualidade.

Atendendo às definições de Zona de Desnível de Dualidade, enquanto no problema bi-objectivo qualquer solução não dominada pertence a uma Zona de Desnível de Dualidade específica, no problema tri-objectivo isso já não acontece, uma vez que podem existir soluções não dominadas que não pertençam a qualquer Zona de Desnível de Dualidade.

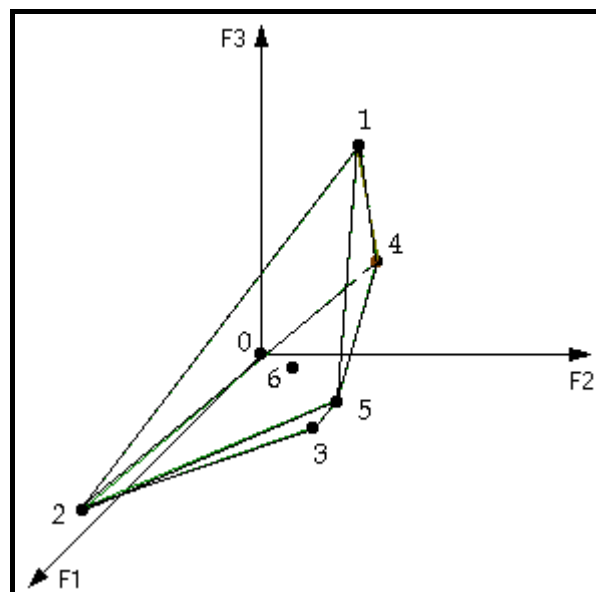


Fig. 4 – Tri-objectivo : tipo de soluções.

A Fig. 4 mostra alguns tipos de soluções num problema tri-objectivo : não dominada do Contorno Convexo e não dominada de uma Zona de Desnível de Dualidade, bem como a solução ideal. A solução 0 é a ideal, as soluções 1, 2, 3, 4 e 5 pertencem ao Contorno Convexo

(únicas), as quais formam quatro Zonas de Desníveis de Dualidade : [1, 2, 4], [1, 4, 5], [2, 3, 5] e [2, 4, 5]. A solução 6 pertence à Zona de Desnível de Dualidade identificada por [2, 4, 5] e apenas a esta (de acordo com os cálculos efectuados com a aplicação associada à abordagem aqui apresentada).

O gráfico da Fig. 5 contém as cinco soluções do Contorno Convexo encontradas.

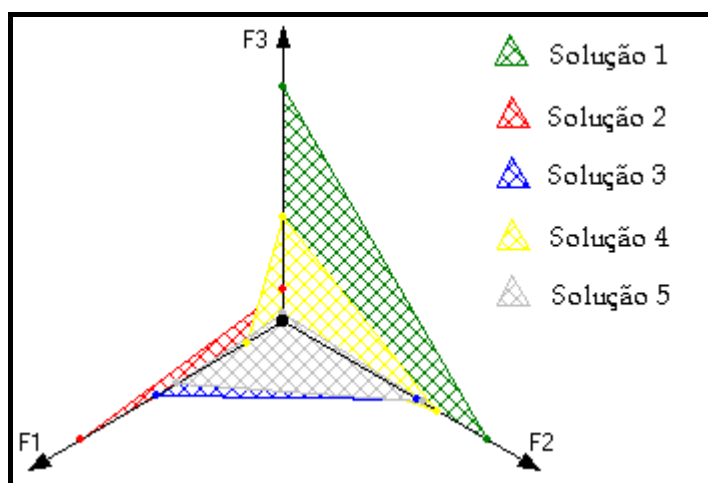


Fig. 5 – Tri-objectivo : gráfico das soluções do Contorno Convexo.

O gráfico da Fig. 6 contém a solução 6 inserida na Zona de Desnível de Dualidade a que pertence, que é a definida pelos vértices 2, 4 e 5 (também representadas).

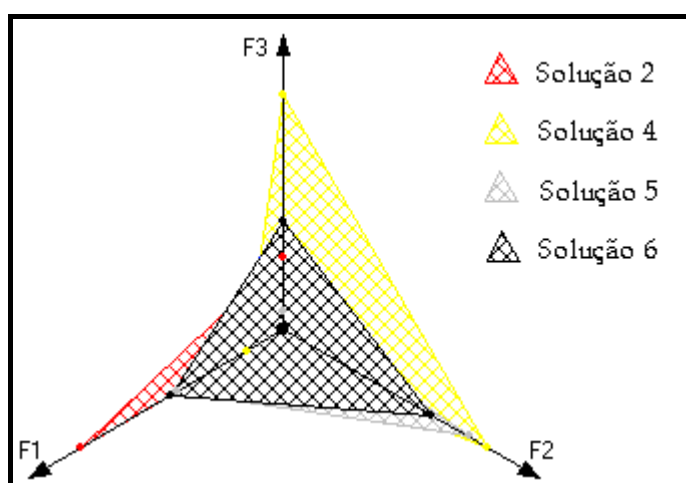


Fig. 6 – Tri-objectivo : soluções de uma Zona de Desnível de Dualidade.

4. Método de procura de soluções em todo o espaço dos objectivos

Este processo permite determinar soluções não dominadas, analisando todo o espaço dos objectivos, não havendo possibilidade de eliminar regiões do espaço de pesquisa.

O passo inicial deste método consiste em determinar a direcção de pesquisa de soluções não dominadas, a qual corresponde ao gradiente do hiperplano definido por h pontos do espaço dos objectivos, cada um dos quais composto por apenas um valor não nulo, o qual corresponde ao valor óptimo de cada um dos objectivos. Por exemplo, se as soluções que optimizam individualmente os objectivos 1, 2 e 3 de um problema tri-objectivo têm associado um custo de a , b e c , respectivamente, então a direcção de pesquisa corresponde ao gradiente do plano que contém os pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$.

No passo principal, cada iteração consiste em determinar uma solução não dominada, resolvendo o problema P1, para determinar os k caminhos mais curtos, cuja função escalar é construída a partir dos pesos definidos da forma descrita, utilizando o algoritmo MPS.

Este processo termina quando todas as soluções não dominadas forem determinadas, ou então quando o AD o decidir.

No entanto, a utilização deste método coloca uma questão. Será que se pode verificar a não dominância de uma solução, apenas tendo em conta as soluções já encontradas segundo aquela direcção de pesquisa? Ou por outras palavras, será que uma solução encontrada num certo momento, e segundo uma dada direcção de pesquisa, não pode dominar uma outra encontrada antes? De facto uma solução determinada, nas circunstâncias descritas, num certo instante não domina qualquer solução que tenha sido determinada antes, como se prova a seguir.

Sejam x e y duas soluções determinadas por esta ordem, tais que os seus valores relativamente à função escalar são Cx e Cy , respectivamente (com $Cx \leq Cy$, pois como x foi determinado antes de y , corresponde a um caminho mais curto). Por outro lado, os valores dos h objectivos associados a estas duas soluções são $c_x = (c_{1x}, \dots, c_{hx})$ e $c_y = (c_{1y}, \dots, c_{hy})$, tais que $Cx = \lambda_1 c_{1x} + \dots + \lambda_h c_{hx}$ e $Cy = \lambda_1 c_{1y} + \dots + \lambda_h c_{hy}$, com $\lambda_i \geq 0$ e $i = 1, \dots, h$.

Suponha-se que y domina x . Então, $c_{iy} \leq c_{ix}$ para qualquer $i \in \{1, \dots, h\}$ e existe pelo menos um $j \in \{1, \dots, h\}$ tal que $c_{jy} < c_{jx}$.

Logo,

$$\lambda_j c_{jy} < \lambda_j c_{jx} \quad \text{com } \lambda_j \geq 0 \text{ para } j \in \{1, \dots, h\} \text{ e}$$

$$\lambda_i c_{iy} \leq \lambda_i c_{ix} \quad \text{com } \lambda_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, h \text{ e } i \neq j.$$

Consequentemente,

$$\lambda_j c_j y < \lambda_j c_j x, \text{ com } j \in \{1, \dots, h\} \text{ e}$$

$$\sum_{j=1}^h \lambda_j c_j y \leq \sum_{j=1}^h \lambda_j c_j x .$$

Desta forma, como $\lambda_j c_j y < \lambda_j c_j x$ então

$$\sum_{i=1}^h \lambda_i c_i y < \sum_{i=1}^h \lambda_i c_i x \quad (C_y < C_x).$$

Assim sendo, $\lambda_1 c_1 x + \dots + \lambda_h c_h x = C_x > C_y = \lambda_1 c_1 y + \dots + \lambda_h c_h y$, o que é uma contradição.

Logo, y não pode dominar x .

No problema bi-objectivo, cada iteração do passo principal do método consiste em resolver o seguinte problema para determinar os k caminhos mais curtos :

[P2] Minimizar $Z = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$

sujeito a **(1) – (4)**

onde,

$$\lambda_1 = \frac{b}{a+b}$$

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$$

a e b são os valores que optimizam individualmente os objectivos 1 e 2, respectivamente.

No problema tri-objectivo, cada iteração do passo principal do método consiste em resolver o seguinte problema para determinar os k caminhos mais curtos :

[P3] Minimizar $Z = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3$

sujeito a **(1) – (4)**

onde,

$$\lambda_i = \frac{|u_i|}{|u_1 + u_2 + u_3|} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$A = (a, 0, 0), B = (0, b, 0) \text{ e } C = (0, 0, c)$$

a , b e c são os valores que optimizam individualmente os objectivos 1, 2 e 3, respectivamente.

Os passos principais do método para determinar soluções não dominadas em todo o espaço dos objectivos, segundo uma determinada direcção de pesquisa, encontram-se descritos com detalhe em Algoritmo 1.

- Passo 1.** Determinar as soluções que optimizam separadamente cada um dos objectivos, utilizando o algoritmo de Dijkstra para cada um deles.
- Passo 2.** Se não existe qualquer solução ou as soluções são a mesma então terminar (apenas existe uma solução não dominada).
- Passo 3.** Questionar o AD se pretende impor restrições nos valores das funções objectivo. Tomando estas restrições e os valores máximos não dominados de cada objectivo (apenas para problemas bi-objectivo), define-se a região de interesse.
- Passo 4.** Construir a função escalar soma ponderada, cujos pesos correspondem ao gradiente do hiperplano definido pelos pontos que cortam os eixos de coordenadas nos valores que optimizam cada objectivo.
- Passo 5.** Determinar a primeira solução não dominada, resolvendo o problema P2/P3, cuja função objectivo é a função escalar construída no Passo 4, utilizando o algoritmo MPS. Acrescentá-la ao conjunto das não dominadas e saltar para o Passo 10.
- Passo 6.** Determinar a próxima solução não dominada (k-ésimo caminho mais curto), resolvendo o problema P2/P3, cuja função objectivo é a função escalar construída no Passo 4, utilizando o algoritmo MPS. Se não existe qualquer solução então terminar.
- Passo 7.** Se toda a região de interessa ficou totalmente analisada então terminar.
- Passo 8.** Se a solução encontrada é dominada então voltar ao Passo 6.
- Passo 9.** Se a solução encontrada está fora de um dos limites impostos, então acrescenta-se ao conjunto das não dominadas que estão fora dos limites impostos e volta-se ao Passo 6; caso contrário, acrescenta-se ao conjunto das não dominadas.
- Passo 10.** Caso o AD pretende determinar mais soluções, voltar ao Passo 6.

Algoritmo 1. Determinar soluções em todo o espaço dos objectivos.

5. Método de procura no Contorno Convexo

O algoritmo proposto nesta abordagem, baseia-se no método NISE desenvolvido por Cohon (ver secção 4.3 do Capítulo 3). Em cada iteração deste método é resolvido um problema de caminho mais curto com um só objectivo, P1, em que a função objectivo é uma

combinação convexa das h funções objectivo originais, cujos pesos utilizados correspondem ao gradiente do hiperplano definido por h vértices adjacentes.

Existem várias vantagens em utilizar este método, entre as quais se destacam as seguintes :

- existem vários algoritmos eficientes para resolver os problemas de caminho mais curto com um só objectivo, apresentados em cada iteração do método;
- a solução (caminho) óptima de um problema daqueles é não dominada no problema original (com h funções objectivo);
- o conjunto de soluções encontradas é fornecido ao AD com a informação relativa aos valores das soluções e aos compromissos entre os objectivos inerentes às várias regiões do conjunto não inferior. É a partir desta informação que o AD pode eliminar regiões que considere sem interesse, ou então dirigir a pesquisa de novas soluções para zonas em que lhe parece mais favorável satisfazer as suas preferências. Desta forma, podem ser necessárias poucas iterações para se identificar uma solução final.

Na fase inicial, o método proposto determina as h soluções não dominadas que optimizam separadamente cada função objectivo envolvida, utilizando o algoritmo MPS para determinar os k caminhos mais curtos, em vez do algoritmo de Dijkstra, de forma a se prever a existência de óptimos alternativos (isto é, pode existir mais do que uma solução que optimize um dos objectivos), o que faz com que algumas daquelas soluções possam não ser estritamente não dominadas. Por exemplo, para o caso bi-objectivo, entre todas as eventuais soluções alternativas, apenas uma é estritamente não dominada.

Por outro lado, note-se que só se pode passar à fase seguinte deste processo caso existam pelo menos dois e três vértices, respectivamente para o problema bi e tri-objectivo, já que é apenas nestas condições que é possível determinar direcções de pesquisa de soluções.

Na fase principal, cada iteração do método consiste em questionar o AD para que este indique a direcção de pesquisa de novos vértices, resolvendo o mesmo problema, mas agora utilizando o algoritmo de Dijkstra. Para tal, o AD tem que indicar h vértices adjacentes, que serão utilizados para definir a direcção de pesquisa. Este processo termina quando o AD achar que não precisa de determinar mais soluções do Contorno Convexo, ou quando todos os vértices forem determinados, o que acontece quando, para qualquer conjunto de h vértices adjacentes, a utilização da função escalar construída para a resolução do problema P1 não encontre uma nova solução.

Neste caso, a existência de óptimos alternativos não acarreta qualquer problema, uma vez que as soluções ao serem transportadas para o problema original (multiobjectivo), leva a que os valores associados a cada um dos objectivos sejam diferentes. Logo, não há dominância de umas soluções em relação às outras. Ao resolver-se o problema P1, cujos pesos correspondem ao gradiente do hiperplano definido por h vértices adjacentes, pode acontecer que aqueles h vértices sejam soluções óptimas alternativas para o problema e, no entanto, todas elas são não dominadas.

5.1. Problema bi-objectivo

Determinar as soluções do Contorno Convexo de um problema bi-objectivo, consiste em resolver o seguinte problema :

$$[P4] \quad \text{Minimizar } Z = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$$

sujeito a (1) – (4)

onde,

$$\lambda_1 = \frac{|Z_2(A) - Z_2(B)|}{|Z_1(A) - Z_1(B)| + |Z_2(A) - Z_2(B)|}$$

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$$

$Z_i(X)$ é o valor da i -ésima função objectivo para o vértice X , com $i = 1, 2$

$Z(A)$ e $Z(B)$ são vértices adjacentes.

Com os pesos definidos desta forma, a solução encontrada, ao resolver o problema P4, encontra-se abaixo do segmento cujas extremidades são as duas soluções adjacentes A e B, ou então uma destas soluções (Fig. 7). Desta forma, se a solução encontrada é nova (diferente de A e B), então pertence ao Contorno Convexo; caso contrário (é uma daquelas) é garantido que estas duas soluções são definitivamente adjacentes, definindo, assim, uma Zona de Desnível de Dualidade. Por outro lado, é garantido que, se forem analisadas todas as combinações de soluções adjacentes, então todos os vértices do problema ficam encontrados.

Refira-se que se os pesos forem outros e a solução encontrada for A ou B, não é garantido que estas sejam definitivamente adjacentes, como se pode verificar pela análise da Fig. 7, onde se mostra que das três direcções de pesquisa (cada uma associada a uma combinação de pesos diferente e representada por uma linha), apenas uma determina a solução devida (C), que corresponde à linha paralela ao segmento de recta \overline{AB} .

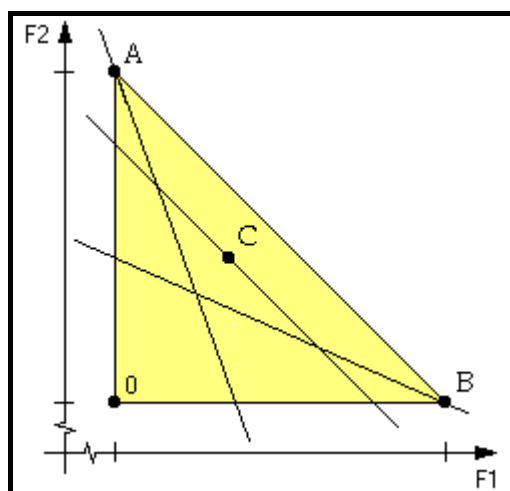


Fig. 7 – Bi-objectivo : definição dos pesos associados à função escalar.

Os principais passos do método para determinar soluções não dominadas do Contorno Convexo, encontram-se descritos, com detalhe, em Algoritmo 2.

- Passo 1.** Determinar os vértices que otimizam separadamente cada um dos objectivos, utilizando o algoritmo MPS para cada um deles.
- Passo 2.** Se não existe qualquer vértice ou os vértices são o mesmo então terminar (apenas existe uma solução não dominada).
- Passo 3.** Caso o AD não pretenda determinar mais vértices então terminar ou iniciar (ou reiniciar) a análise de uma qualquer Zona de Desnível de Dualidade já conhecida.
- Passo 4.** Questionar o AD acerca dos vértices que pretende utilizar para determinar a direcção de pesquisa de novos vértices (indicar dois que sejam diferentes e adjacentes).
- Passo 5.** Determinar a função escalar soma ponderada, cujos pesos correspondem ao gradiente da recta que passa pelos dois vértices indicados.
- Passo 6.** Resolver o problema P4, cuja função objectivo é a função escalar construída no passo anterior, utilizando o algoritmo de Dijkstra.
- Passo 7.** Se o vértice encontrado é novo então acrescenta-se ao conjunto das soluções não dominadas. Voltar ao Passo 3.

Algoritmo 2. Bi-objectivo : determinar soluções do Contorno Convexo.

Note-se que se o vértice encontrado no Passo 7 for novo, então isso implica que os dois vértices indicados no Passo 4 deixam de ser adjacentes entre si; caso contrário estes vértices passam a definitivamente adjacentes, formando assim uma Zona de Desnível de Dualidade.

5.2. Problema tri-objectivo

Determinar as soluções do Contorno Convexo de um problema tri-objectivo, consiste em resolver o seguinte problema :

$$[\text{P5}] \quad \text{Minimizar } Z = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3$$

sujeito a **(1) – (4)**

onde,

$$\lambda_i = \frac{|u_i|}{|u_1 + u_2 + u_3|} \quad (i=1, 2, 3) \quad \text{se } u_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = \frac{|u_i|}{|u_i + u_j|} \\ \lambda_j = \frac{|u_j|}{|u_i + u_j|} \quad (i, j \neq k) \quad \text{se } u_k < 0, k \in \{1, 2, 3\} \\ \lambda_k = 0 \end{array} \right.$$

com $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = \vec{AB} \times \vec{AC}$, em que A, B e C são vértices adjacentes.

Da mesma maneira que se concluiu para o problema bi-objectivo, também os pesos utilizados neste problema garantem que todas as soluções do Contorno Convexo são determinadas, desde que cada combinação de pesos corresponda ao gradiente do plano definido por três vértices adjacentes.

Por outro lado, tal como acontece para o problema bi-objectivo (quando uma das combinações de pesos não corresponde ao gradiente da recta que passa por dois vértices adjacentes — Fig. 7), também neste caso se os pesos não forem aqueles e a solução encontrada ao resolver o problema P5 for um daqueles três vértices, então não é garantido que aqueles três vértices sejam definitivamente adjacentes.

Refira-se ainda que, ao resolver-se o problema P5 pode acontecer que seja determinado um vértice que já exista, mas diferente de qualquer um dos utilizados na construção da função escalar de P5. Isto significa que aqueles três vértices não são definitivamente adjacentes; logo, não formam uma Zona de Desnível de Dualidade.

Os passos essenciais para determinar as soluções do Contorno Convexo, encontram-se descritos detalhadamente em Algoritmo 3.

- Passo 1.** Determinar os vértices que optimizam separadamente cada um dos objectivos, utilizando o algoritmo MPS para cada um deles.
- Passo 2.** Se não existe qualquer vértice ou os vértices são o mesmo então terminar (apenas existe uma solução não dominada).
- Passo 3.** Se os três vértices são todos diferentes então passar ao Passo 7.
- Passo 4.** Procurar um terceiro vértice utilizando combinações de pesos aleatórias no problema P5. Se não se encontrar qualquer vértice então terminar (só dois vértices).
- Passo 5.** Se o AD não pretende determinar mais vértices, então terminar ou iniciar (ou reiniciar) a análise numa Zona de Desnível de Dualidade já conhecida (ver secção 6.2).
- Passo 6.** Questionar o AD acerca dos vértices que pretende utilizar para determinar a direcção de pesquisa de novos vértices (indicar três que sejam diferentes e adjacentes).
- Passo 7.** Determinar a função escalar cujos pesos correspondem ao gradiente do plano que contém os três vértices indicados.
- Passo 8.** Resolver o problema P5, em que a função objectivo é a função escalar construída no passo anterior, utilizando o algoritmo de Dijkstra.
- Passo 9.** Se o vértice encontrado é novo então acrescenta-se ao conjunto das soluções não dominadas. Voltar ao Passo 6.

Algoritmo 3. Tri-objectivo : determinar soluções do Contorno Convexo.

No Passo 7 quando uma das componentes do gradiente do plano que contém os três vértices indicados é negativa, terá que haver um relaxamento na direcção de pesquisa, para que a combinação de pesos possam ser aplicados à resolução do problema P5, pois $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$). Uma das alternativas é anular esta componente ou atribuir um valor muito próximo de zero. Note-se que se pode considerar, sem perda de generalidade, que qualquer gradiente tem no máximo uma componente negativa, pois se existirem duas ou três, basta multiplicar todas as componentes por (-1) — passando a ter uma ou zero, respectivamente.

6. Método de procura em Zonas de Desníveis de Dualidade

Para determinar as soluções que pertencem a uma dada Zona de Desnível de Dualidade, resolve-se um problema de determinar os k caminhos mais curtos, cuja função objectivo é construída à custa do gradiente do hiperplano definido pelas soluções que caracterizam a Zona de Desnível de Dualidade a analisar. O algoritmo utilizado na resolução deste problema

é o denominado por MPS (ver secção 4.3 do Capítulo 3). Em cada iteração do algoritmo, o AD pode decidir pela continuidade da pesquisa de soluções dentro daquela Zona de Desnível de Dualidade, ou então, por terminar essa pesquisa. A pesquisa de soluções termina mediante três situações :

- a) uma das soluções encontradas satisfaz o AD, de tal modo que é escolhida como “melhor” solução de compromisso (solução final);
- b) determinaram-se todas as soluções não dominadas da Zona de Desnível de Dualidade;
- c) o AD considera que, apesar de ainda poderem existir soluções não dominadas na Zona de Desnível de Dualidade, elas não o irão satisfazer, decidindo, assim, analisar outra.

6.1. Problema bi-objectivo

Os principais passos para determinar as soluções não dominadas de uma determinada Zona de Desnível de Dualidade, encontram-se descritos com detalhe em Algoritmo 4.

Passo 1. Indicar os dois vértices que definem a Zona de Desnível de Dualidade a analisar (têm que ser diferentes e definitivamente adjacentes).

Passo 2. Questionar o AD se pretende impor restrições nos valores das funções objectivo. Tomando estas restrições e os valores máximos não dominados de cada objectivo nesta zona constrói-se a região de interesse.

Passo 3. Construir a função escalar soma ponderada, cujos pesos correspondem ao gradiente da recta que passa pelos vértices indicados no Passo 1.

Passo 4. Determinar a primeira solução não dominada, resolvendo o problema P4, utilizando o algoritmo MPS. Saltar para o Passo 6.

Passo 5. Determinar a próxima solução (k-ésimo caminho mais curto) do problema P4, utilizando o algoritmo MPS.

Passo 6. Se não foi determinada qualquer solução ou toda a região de interesse ficou completamente analisada, então terminar.

Passo 7. Se a solução encontrada já existe ou é dominada então voltar ao Passo 5.

Passo 8. Se a solução encontrada está fora de um dos limites impostos então voltar ao Passo 5; caso contrário, acrescentar a solução ao conjunto das não dominadas.

Passo 9. Caso o AD pretende determinar mais soluções, voltar ao Passo 5.

Algoritmo 4. Bi-objectivo : pesquisa numa Zona de Desnível de Dualidade.

Sempre que se encontra uma nova solução na Zona de Desníveis de Dualidade, a região onde se podem localizar soluções não dominadas (que são representadas por triângulos — Fig. 8) é actualizada. Desta forma, para se verificar se uma determinada solução pertence a essa Zona de Desníveis de Dualidade (Passo 8), basta verificar se pertence a um dos vários triângulos que traduzem aquelas regiões.

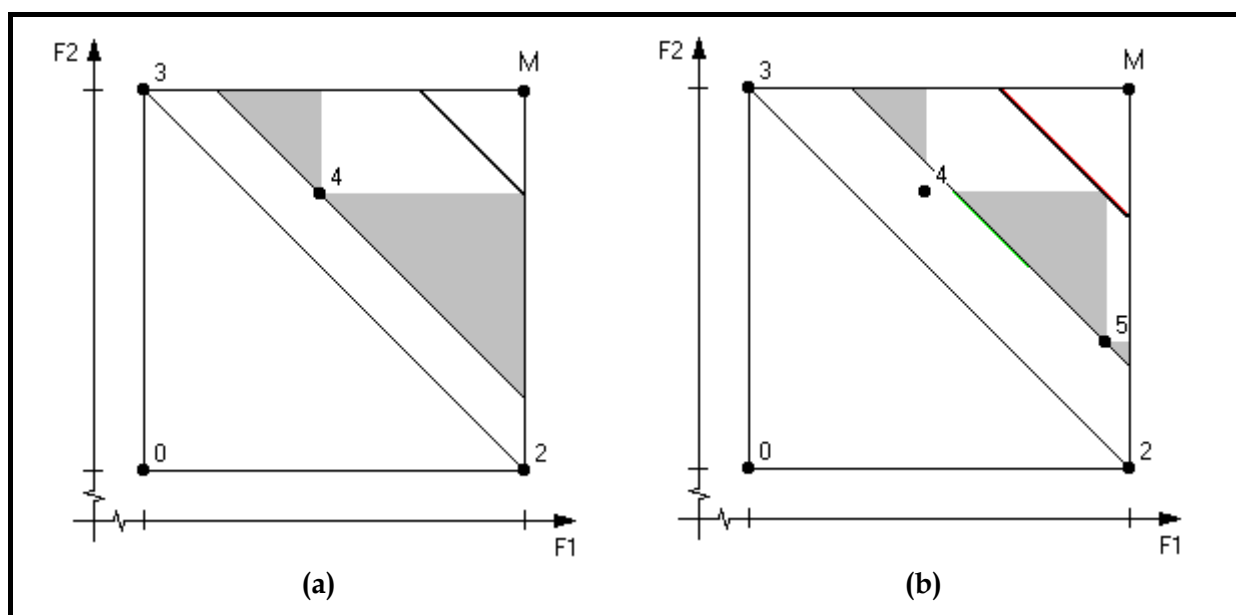


Fig. 8 – Bi-objectivo : pesquisa numa Zona de Desníveis de Dualidade.

A Fig. 8 apresenta um possível desenvolvimento da pesquisa de soluções não dominadas na Zona de Desníveis de Dualidade definida pelas soluções 2 e 3. Inicialmente, a região onde se podem localizar soluções não dominadas é representada apenas pelo triângulo cujos vértices são os pontos 2, 3 e M. Depois de ser determinada a solução 4, aquela região é substituída por duas (regiões a cheio na Fig. 8.(a)). Note-se que abaixo do segmento de recta que passa por 4 (e paralela a $\overline{23}$) não foram encontradas soluções e qualquer solução que se encontre no rectângulo que contém 4 e M como vértices é dominada pela solução 4. Depois de ter sido determinada a solução 5, as duas regiões são substituídas por três (regiões a cheio na Fig. 8.(b)).

A linha mais carregada que se encontra na Fig. 8.(a) e (b), que é paralela ao segmento $\overline{23}$ e passa pelo ponto mais afastado das regiões onde se podem localizar soluções não dominadas relativamente ao segmento $\overline{23}$, indica o limite a partir do qual não existem mais soluções não dominadas. Ou seja, como as soluções são determinadas segundo a direcção de pesquisa associada ao gradiente da recta que passa pelos vértices 2 e 3, se for determinada

uma solução que se encontre para além daquela linha, isso significa que toda a região onde é possível se encontrar soluções não dominadas ficou completamente analisada; logo, não existem mais soluções não dominadas nesta Zona de Desnível de Dualidade.

Refira-se que caso sejam impostas restrições nos valores das funções objectivo, esta linha também é determinada à custa dessas restrições, como se pode observar na Fig. 9.

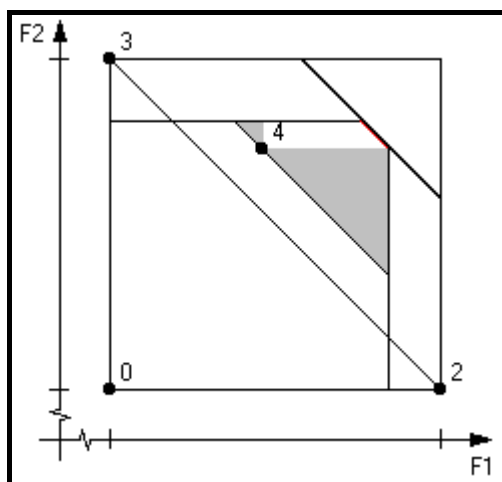


Fig. 9 – Bi-objectivo : definição da região de interesse.

Comparando a Fig. 8.(a) com a Fig. 9, verifica-se que a região de interesse sofreu alteração (diminuiu) com a introdução de restrições nos valores das funções objectivo.

6.2. Problema tri-objectivo

Os passos essenciais para determinar soluções não dominadas de uma determinada Zona de Desníveis de Dualidade, encontram-se descritos detalhadamente em Algoritmo 5.

-
- | |
|---|
| <p>Passo 1. Indicar os três vértices que definem a Zona de Desníveis de Dualidade a analisar (têm de ser diferentes e definitivamente adjacentes).</p> <p>Passo 2. Questionar o AD se pretende impor restrições nos valores das funções objectivo. Tomando estas restrições constrói-se a região de interesse.</p> <p>Passo 3. Construir a função escalar soma ponderada, cujos pesos correspondem ao gradiente do plano que contém os vértices indicados no Passo 1.</p> <p>Passo 4. Determinar a primeira solução não dominada, resolvendo o problema P5, utilizando o algoritmo MPS. Saltar para o Passo 6.</p> <p>Passo 5. Determinar a próxima solução (k-ésimo caminho mais curto) do problema P5, utilizando o algoritmo MPS.</p> <p>Passo 6. Se não foi determinada qualquer solução ou toda a região de interesse ficou completamente analisada, então terminar.</p> <p>Passo 7. Se a solução encontrada já existe ou é dominada, então voltar ao Passo 5.</p> <p>Passo 8. Se a solução encontrada não pertence à região de interesse, então acrescentá-la ao conjunto das não dominadas que estão fora da região de interesse e voltar ao Passo 5. Caso contrário, acrescentar a solução ao conjunto das não dominadas</p> <p>Passo 9. Caso o AD pretenda determinar mais soluções, voltar ao Passo 5.</p> |
|---|

Algoritmo 5. Tri-objectivo : pesquisa numa Zona de Desníveis de Dualidade.

Para se verificar se uma solução é dominada (Passo 7), tem-se em conta todas as soluções não dominadas já encontradas : aquelas que pertencem e que não pertencem à Zona de Desníveis de Dualidade a analisar.

Uma situação que se pode considerar muito particular, é aquela em que no Contorno Convexo apenas foram encontradas duas soluções. Nesta caso, apesar de não existir qualquer Zona de Desníveis de Dualidade, é possível determinar mais soluções não dominadas. Para tal, a direcção de pesquisa corresponde a uma combinação de pesos onde dois dos valores são nulos.

7. Métodos interactivos para encontrar uma solução final

Nesta secção são descritos dois métodos interactivos associados aos dois processos apresentados na abordagem proposta. Estes métodos destinam-se a encontrar soluções não dominadas do problema, até que o AD decida terminar com esta pesquisa, visto ter encontrado uma solução que o satisfaz (melhor solução de compromisso).

No entanto, enquanto que no primeiro método as soluções são encontradas de acordo com uma determinada direcção de pesquisa (que é calculada), no segundo elas são determinadas em duas fases distintas, consoante pertençam ao Contorno Convexo (ver secções 5.1 e 5.2 deste capítulo) ou a Zonas de Desníveis de Dualidade (ver secções 6.1 e 6.2 deste capítulo), possibilitando, desta forma, orientar a procura de soluções não dominadas para regiões do espaço dos objectivos que o AD considere que poderão conter uma solução satisfatória, o que não acontece com o primeiro método, visto neste apenas existir uma região em análise, que é todo o espaço dos objectivos.

Por outro lado, o segundo método permite determinar, ora soluções de um tipo, ora do outro, não havendo obrigatoriedade de primeiro se determinarem todas as soluções do Contorno Convexo (vértices) e só depois analisar as Zonas de Desníveis de Dualidade pretendidas. Ou seja, depois de se analisar algumas Zonas de Desníveis de Dualidade, pode-se regressar à análise do Contorno Convexo, se ainda existirem soluções deste tipo por encontrar. No entanto, sempre que se queira analisar uma Zona de Desnível de Dualidade, as soluções que a caracterizam terão que estar identificadas (o que é feito ao analisar-se o Contorno Convexo).

Para melhor se perceber a abordagem apresentada, são desenvolvidos a seguir dois exemplos : um para o problema bi-objectivo e outro para o problema tri-objectivo. No desenvolvimento destes exemplos, colocamo-nos no papel de um AD hipotético no sentido de ilustrar o funcionamento dos métodos e dos utensílios gráficos colocados à sua disposição.

7.1. Problema bi-objectivo

Para ilustrar o funcionamento da abordagem apresentada, gerou-se aleatoriamente uma rede não orientada com 20 nós e 100 arcos, em que de cada nó saem 5 arcos e cada arco tem associado dois valores correspondentes a dois objectivos. Pretende-se determinar a “melhor” solução de compromisso, associada ao caminho entre os nós 1 e 19 ($s = 1$ e $t = 19$), que mais de perto corresponda às preferências do AD, em presença dos dois objectivos.

7.1.1. Procura em todo o espaço dos objectivos

Os valores obtidos no passo inicial deste método, com vista à determinação da direcção de pesquisa das soluções, foram os seguintes : 1037 (mínimo do objectivo 1) e 392 (mínimo do objectivo 2). Desta forma, a função escalar utilizada foi construída a partir dos seguintes pesos : $\lambda_1 = 0.275 (= 392/(1037+392))$ e $\lambda_2 = 0.725 (= 1 - 0.275)$, como descrito na secção 4 deste capítulo.

A Fig. 10 apresenta o resultado da primeira pesquisa de soluções não dominadas, que corresponde à determinação da primeira solução, assim como a solução ideal :

$$\text{Solução 1} = [1, 11, 16, 19] \implies (1956, 392)$$

$$\text{Solução 0} = [\quad] \implies (1037, 392) \text{ — solução ideal.}$$

A região a cheio indica as zonas onde ainda é possível encontrar soluções não dominadas.

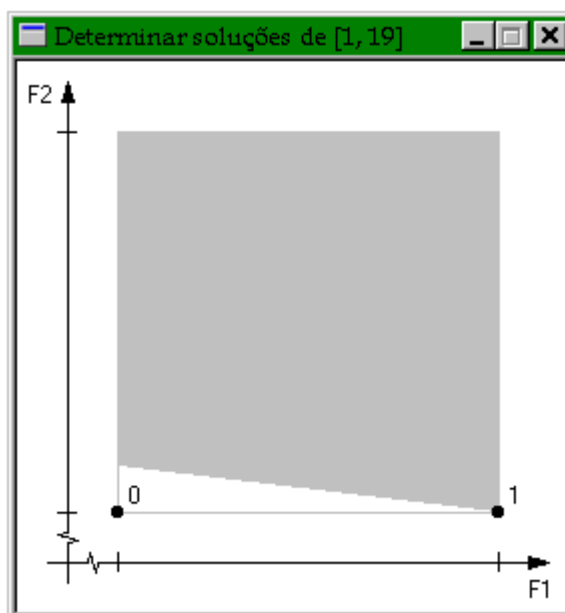


Fig. 10 – Bi-objectivo : primeira pesquisa no Espaço Total.

Como a solução obtida não satisfaz o AD, este decidiu realizar uma nova pesquisa, da qual resultou a solução 2 (Fig. 11) :

$$\text{Solução 2} = [1, 8, 19] \implies (1671, 532).$$

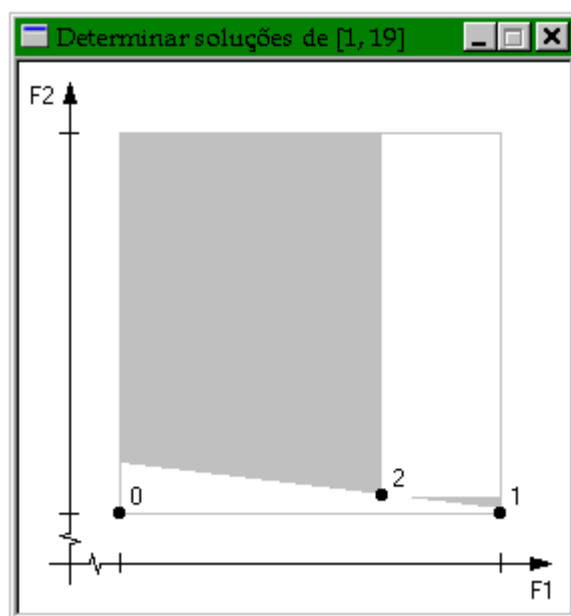


Fig. 11 – Bi-objectivo : segunda pesquisa no Espaço Total.

Como o AD não se sente satisfeito com as soluções conhecidas, resolveu efectuar mais uma pesquisa, da qual resultou a solução 3 (Fig. 12) :

$$\text{Solução 3} = [1, 10, 14, 19] \implies (1488, 1373).$$

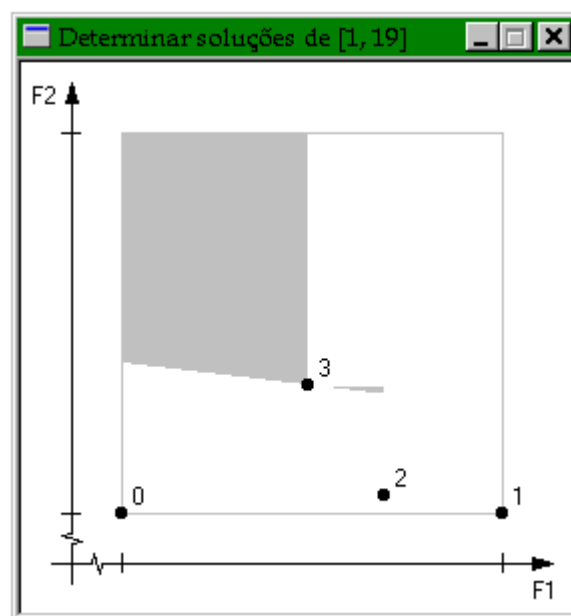


Fig. 12 – Bi-objectivo : terceira pesquisa no Espaço Total.

Apesar desta última solução o satisfazer razoavelmente, o AD decidiu efectuar mais uma pesquisa, da qual foi encontrada a solução 4 (Fig. 13) :

$$\text{Solução 4} = [1, 6, 3, 4, 19] \implies (1360, 2170).$$

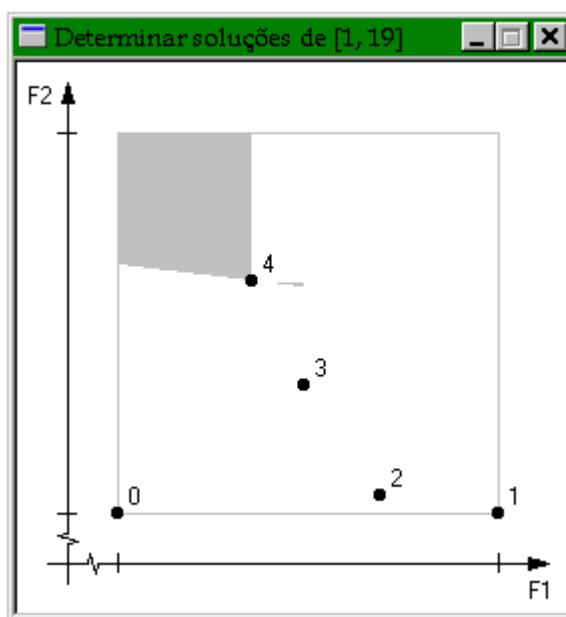


Fig. 13 – Bi-objectivo : quarta pesquisa no Espaço Total.

Analisando esta última solução e a região onde é possível se encontrar soluções não dominadas, o AD decidiu terminar com a pesquisa de soluções não dominadas, escolhendo como “melhor” solução de compromisso, a solução 3 : $[1, 10, 14, 19] \implies (1488, 1373)$.

7.1.2. Procura no Contorno Convexo e em Zonas de Desníveis de Dualidade

A Fig. 14 apresenta as duas primeiras soluções do Contorno Convexo (vértices), que optimizam cada uma das funções objectivo separadamente e a solução ideal :

Solução 1 = $[1, 5, 13, 4, 19] \implies (1037, 3296)$ — optimiza o objectivo 1

Solução 2 = $[1, 11, 16, 19] \implies (1956, 392)$ — optimiza o objectivo 2

Solução 0 = $[] \implies (1037, 392)$ — solução ideal.

Analisando as soluções 1 e 2, conclui-se que qualquer solução não dominada terá que estar situada no rectângulo cujos vértices são estas duas soluções, a solução ideal e o ponto formado pelos valores máximos correspondentes aquelas duas soluções, que neste caso terá os valores de 1956 (máximo de F1) e 3296 (máximo de F2). Por outro lado, qualquer solução do Contorno Convexo, se existir, encontra-se abaixo do segmento $\overline{12}$, mais precisamente no interior do triângulo formado pelas soluções 0, 1 e 2 (região a cheio na Fig. 14).

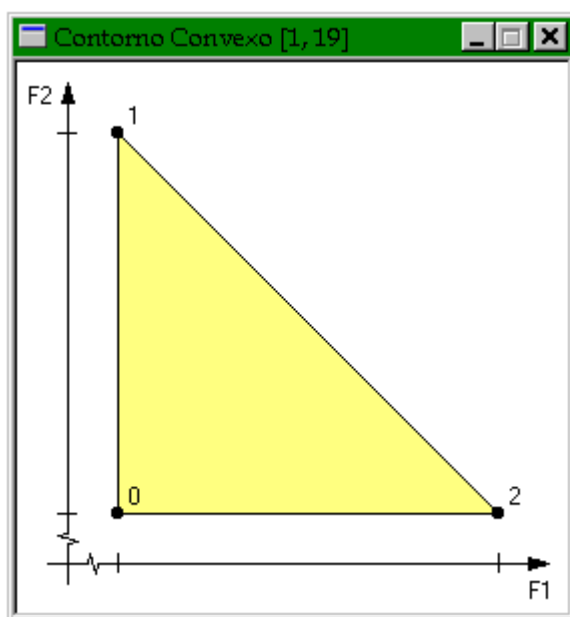


Fig. 14 – Bi-objectivo : primeira pesquisa no Contorno Convexo.

Como qualquer uma destas duas soluções não satisfaz o AD, este decidiu procurar um outro vértice, utilizando como direcção de pesquisa o gradiente da recta que passa pelos vértices 1 e 2 (que são adjacentes). Desta pesquisa, resultou o vértice 3 (Fig. 15) :

$$\text{Solução 3} = [1, 8, 19] \implies (1671, 532).$$

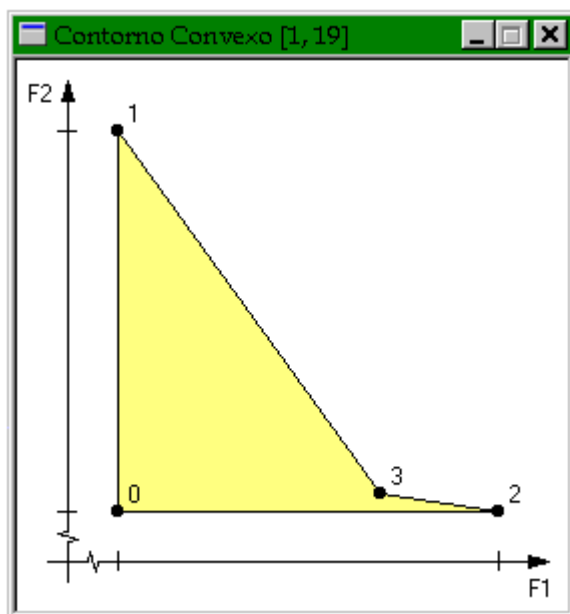


Fig. 15 – Bi-objectivo : primeira pesquisa no Contorno Convexo.

Com a determinação da solução 3, os vértices 1 e 2 deixaram de ser adjacentes entre si, passando a existir 2 combinações de vértices adjacentes : (1, 3) e (3, 2) — Fig. 15.

Como as soluções existentes ainda não satisfazem o AD e as Zonas de Desníveis de Dualidade que possam ser construídas a partir dos vértices 2 e 3 também não lhe agradam, decidiu-se realizar mais uma pesquisa de vértices, utilizando como direcção o gradiente da recta que passa pelos vértices 1 e 3. Desta pesquisa foi encontrado o vértice 4 (Fig. 16) :

$$\text{Solução 4} = [1, 11, 3, 4, 19] \implies (1136, 2372).$$

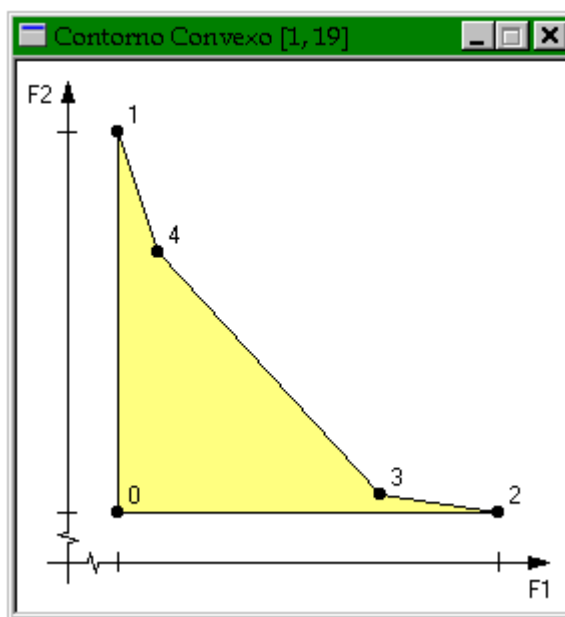


Fig. 16 – Bi-objectivo : segunda pesquisa no Contorno Convexo.

O AD ao analisar as soluções já encontradas, decidiu eliminar de futuras pesquisas as regiões acima do vértice 4 e à direita do vértice 3. Ou seja, apenas continuar a pesquisa entre as soluções 3 e 4, identificada como a região onde uma solução final assume valores interessantes para ambos os objectivos.

Desta forma, continuou a pesquisa de vértices entre as soluções 3 e 4, da qual não resultou qualquer nova solução (Fig. 17), o que significa que estes dois vértices são definitivamente adjacentes, e portanto, constituem uma Zona de Desnível de Dualidade.

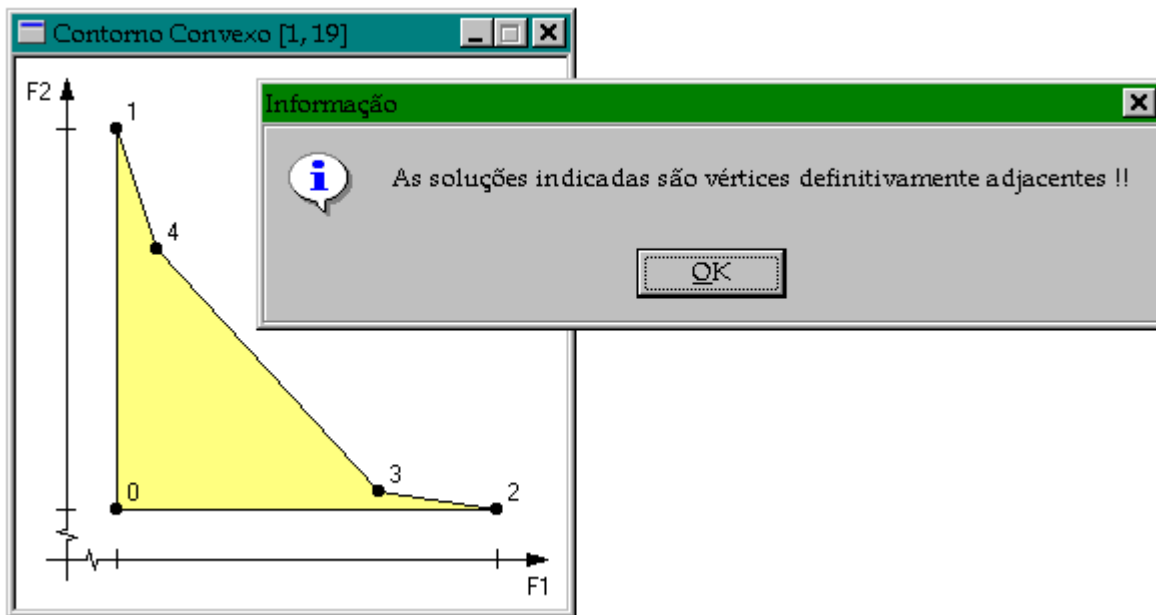


Fig. 17 – Bi-objetivo : quarta pesquisa no Contorno Convexo.

Como nesta região já não existem mais vértices, o AD decidiu pesquisar mais soluções não dominadas, mas agora na Zona de Desnível de Dualidade definida pelos vértices 3 e 4. Inicialmente foi encontrada a solução 5 (Fig. 18) :

$$\text{Solução 5} = [1, 8, 12, 4, 19] \implies (1203, 2349).$$

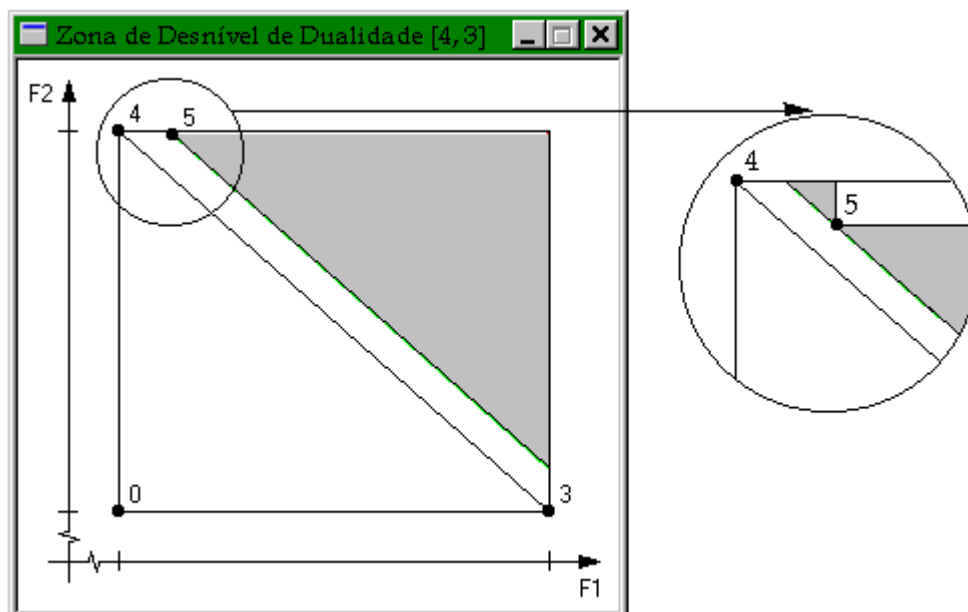


Fig. 18 – Bi-objetivo : primeira pesquisa numa Zona de Desnível de Dualidade.

Como a região onde é possível encontrar soluções não dominadas foi alterada, pois inicialmente era representada pelo triângulo cujos vértices eram as soluções 3 e 4 e o ponto definido pelos valores máximos de cada objectivo relativos às soluções 3 e 4 (as que definem a Zona de Desnível de Dualidade), que tem os valores de 1671 (objectivo 1) e 2372 (objectivo 2), é necessário actualizar esta região. Desta forma, existem agora duas regiões (Fig. 18 – “Zoom”), pois abaixo da linha que passa pela solução 5, paralela ao segmento $\overline{34}$ não foi encontrada qualquer solução e o rectângulo a branco que se encontra acima e à direita da solução 5, corresponde a uma zona onde qualquer solução que ali se localize é dominada pela solução 5.

Suponhamos que o AD não se encontra ainda satisfeito com esta solução, pelo que indicou uma nova pesquisa nesta Zona de Desnível de Dualidade. O resultado foi a determinação da solução 6 (Fig. 19) :

$$\text{Solução 6} = [1, 10, 14, 19] \implies (1488, 1373).$$

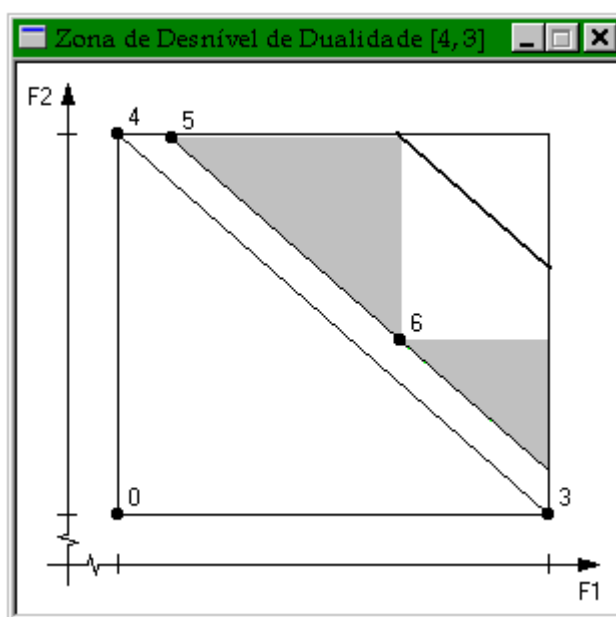


Fig. 19 – Bi-objectivo : segunda pesquisa numa Zona de Desnível de Dualidade.

Com a determinação da solução 6, as regiões onde é possível calcular novas soluções não dominadas sofreram alteração, como mostra o gráfico da Fig. 19. A linha mais carregada, que é paralela à linha que passa pelas soluções 3 e 4, corresponde ao limite dessas regiões, tal que se uma solução estiver para além dessa linha, isso significa que todas as soluções não dominadas desta Zona de Desnível de Dualidade foram encontradas. Inicialmente esta linha passava pelo ponto formado pelos valores máximos de cada objectivo (1671, 2372),

correspondentes às duas soluções que definem a Zona de Desnível de Dualidade (3 e 4), sendo depois sucessivamente actualizada, à medida que se calculam novas soluções não dominadas.

Se se prosseguir a pesquisa de soluções nesta Zona de Desnível de Dualidade, obtém-se a solução 7 (Fig. 20) :

$$\text{Solução 7} = [1, 6, 3, 4, 19] \implies (1360, 2170).$$

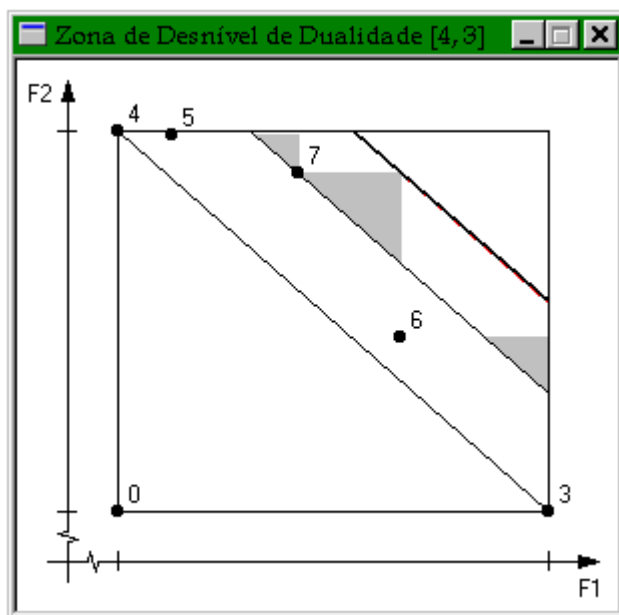


Fig. 20 – Bi-objectivo : terceira pesquisa numa Zona de Desnível de Dualidade.

Ao analisar a solução encontrada e as novas regiões onde se podem localizar novas soluções não dominadas, o AD decidiu escolher a solução 6 como a “melhor” solução de compromisso, aceitável como solução final.

No entanto, se o AD tivesse dúvidas relativamente a outras soluções encontradas noutras Zonas de Desníveis de Dualidade (o que não acontece) ou no Contorno Convexo, o AD tem a possibilidade de visualizar todas as soluções num único gráfico (Fig. 21.(a)) ou numa tabela (Fig. 21.(b)).

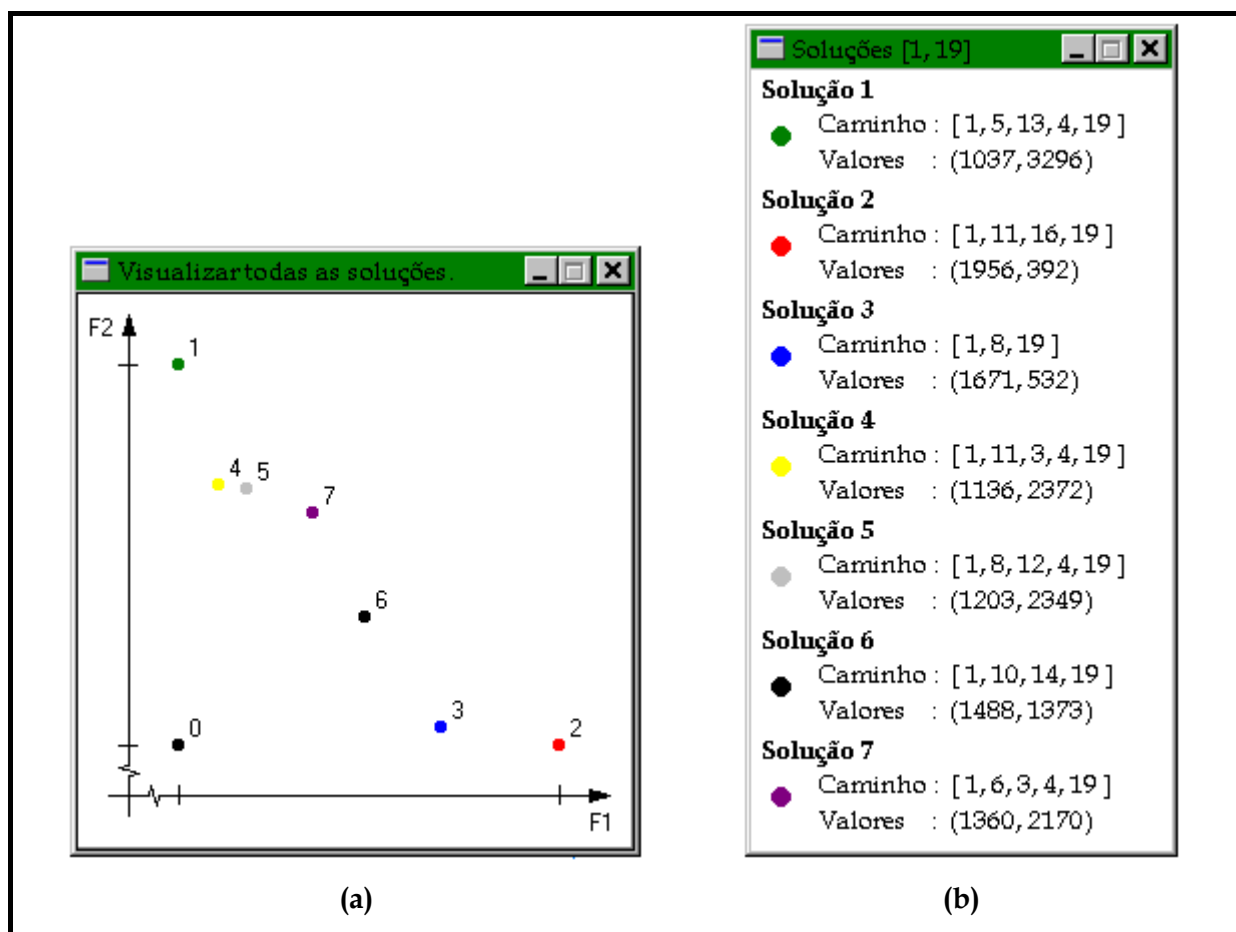


Fig. 21 – Bi-objectivo : (a) gráfico e (b) tabela com todas as soluções.

Refira-se ainda que, caso o AD não ficasse satisfeito com as soluções encontradas, podia regressar à pesquisa de mais soluções do Contorno Convexo, uma vez que é desconhecida qualquer outra Zona de Desnível de Dualidade que não seja a $[4, 3]$, para posteriormente se poder analisar outras Zonas de Desníveis de Dualidade.

7.2. Problema tri-objectivo

Para ilustração foi gerada aleatoriamente uma rede não orientada com 50 nós e 125 arcos, em que a cada nó incidem 5 arcos e cada arco tem associado três valores correspondentes a três funções objectivo. Pretende-se então determinar uma solução de compromisso, correspondente a um caminho entre os nós 1 e 50 ($s = 1$ e $t = 50$).

7.2.1. Procura em todo o espaço dos objectivos

Os valores obtidos no passo inicial deste método, com vista à determinação da direcção de pesquisa das soluções, foram os seguintes : 1260 (mínimo do objectivo 1), 884 (mínimo do

objectivo 2) e 527 (mínimo do objectivo 3). A função escalar utilizada foi construída a partir dos seguintes pesos : $\lambda_1 = 0.2076$, $\lambda_2 = 0.2960$ e $\lambda_3 = 0.4964$, como descrito na secção 4 deste capítulo.

A Fig. 22 apresenta o resultado da primeira pesquisa de soluções não dominadas em todo o espaço dos objectivos do problema :

$$\text{Solução 1} = [1, 34, 24, 50] \implies (1260, 1734, 1733).$$

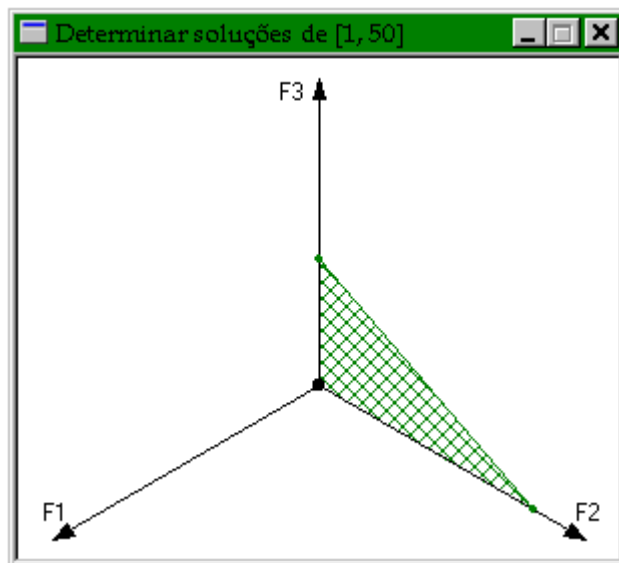


Fig. 22 – Tri-objectivo : primeira pesquisa no Espaço Total.

Como a solução encontrada não agrada o AD, este decidiu efectuar mais uma pesquisa de soluções não dominadas no espaço dos objectivos, a qual resultou na determinação de uma outra solução (Fig. 23) :

$$\text{Solução 2 (vermelha)} = [1, 28, 29, 2, 50] \implies (2013, 1371, 1790).$$

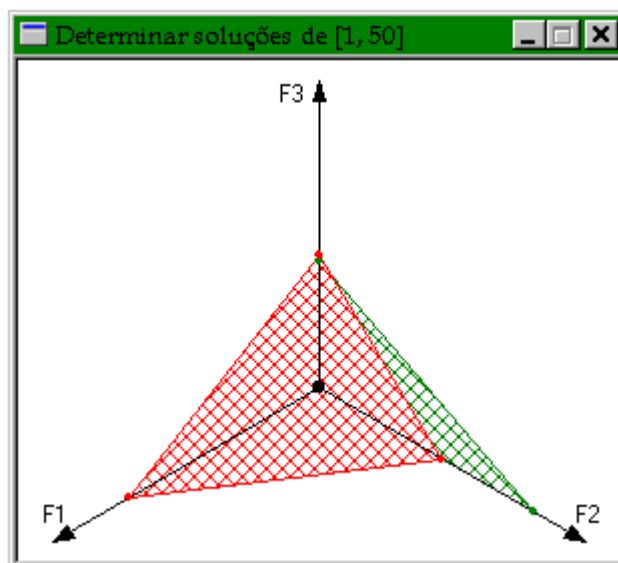


Fig. 23 – Tri-objectivo : segunda pesquisa no Espaço Total.

Também esta última solução não satisfaz o AD, pelo que decidiu efectuar mais uma pesquisa, da qual resultou mais uma solução (Fig. 24) :

$$\text{Solução 3 (azul)} = [1, 28, 29, 17, 50] \implies (2092, 903, 2203).$$

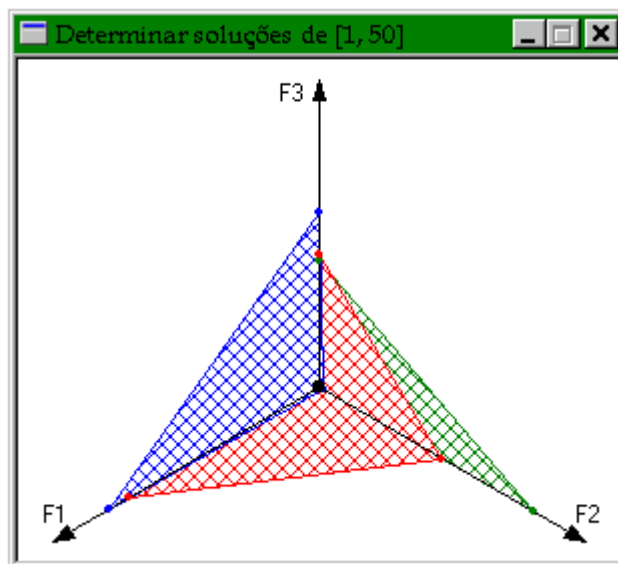


Fig. 24 – Tri-objectivo : terceira pesquisa no Espaço Total.

Pela análise das três soluções não dominadas já encontradas, o AD resolveu efectuar mais uma pesquisa, pois qualquer daquelas soluções não o satisfaz. O resultado desta pesquisa, foi a determinação de uma outra solução (Fig. 25) :

$$\text{Solução 4 (amarela)} = [1, 13, 47, 48, 24, 50] \implies (4381, 2160, 527).$$

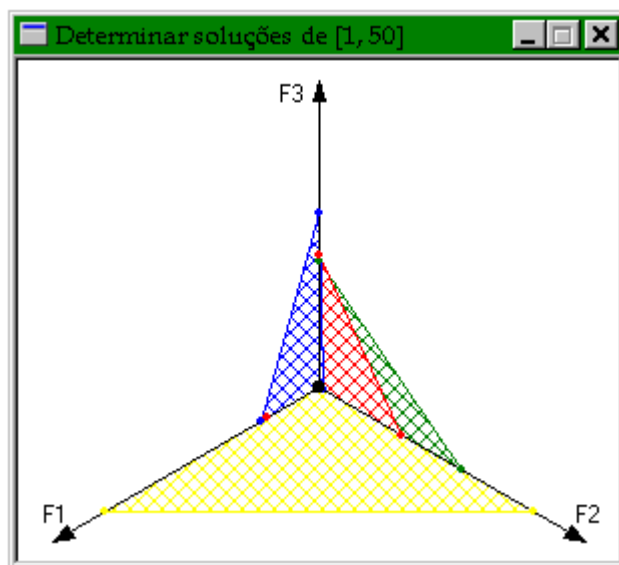


Fig. 25 – Tri-objectivo : quarta pesquisa no Espaço Total.

Como também esta última solução não agrada ao AD, este decidiu realizar mais uma pesquisa de soluções não dominadas, na qual foi encontrada mais uma solução (Fig. 26) :

Solução 5 (prateada) = [1, 34, 11, 17, 50] ==> (2455, 1322, 2011).

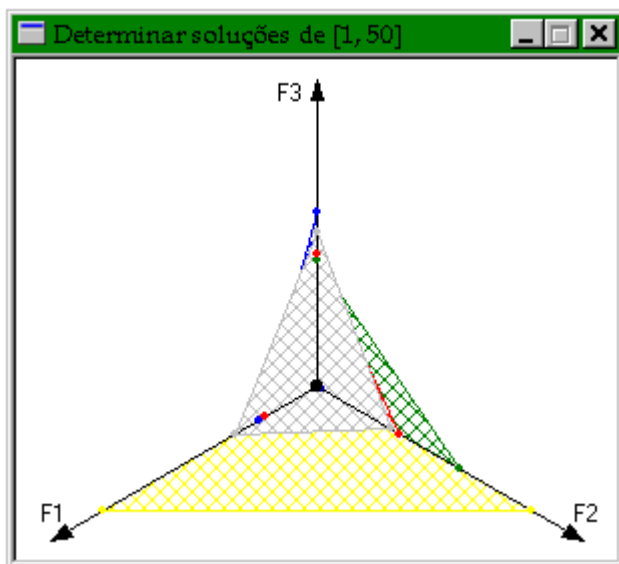


Fig. 26 – Tri-objectivo : quinta pesquisa no Espaço Total.

Numa primeira análise à solução encontrada, o AD sente-se razoavelmente satisfeito com ela. No entanto, para se escolher uma solução final, geralmente não basta apenas analisar cada solução individualmente, mas é necessário compará-la com as restantes. Para tal, as soluções devem ser analisadas em gráficos onde estejam todas representadas, e onde seja

possível verificar os compromissos entre os objectivos. Desta forma, e apesar de no gráfico da Fig. 26 estarem representadas todas as soluções não dominadas já encontradas, outras formas de visualizar a informação estão representadas na Fig. 27.

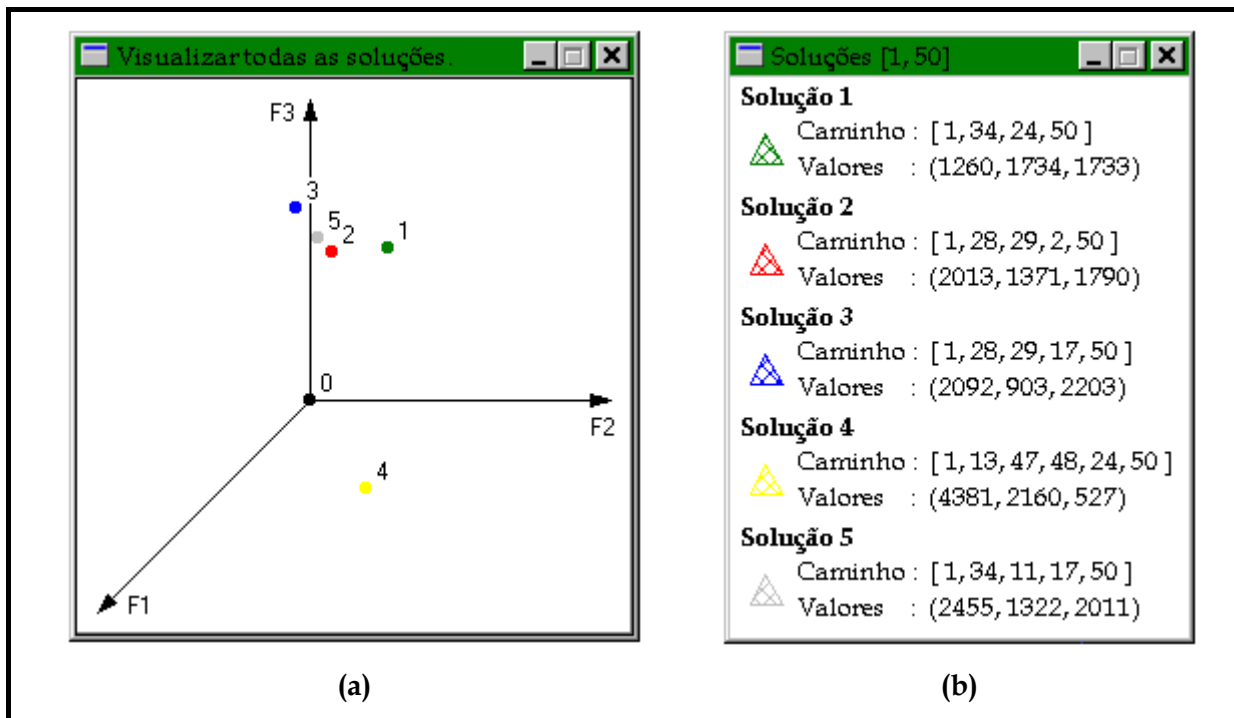


Fig. 27 – Tri-objectivo : (a) gráfico e (b) tabela com todas as soluções.

Também é possível analisar-se as soluções numa outra perspectiva, como por exemplo em projecções nos três planos ortogonais possíveis, como se pode ver na Fig. 28.

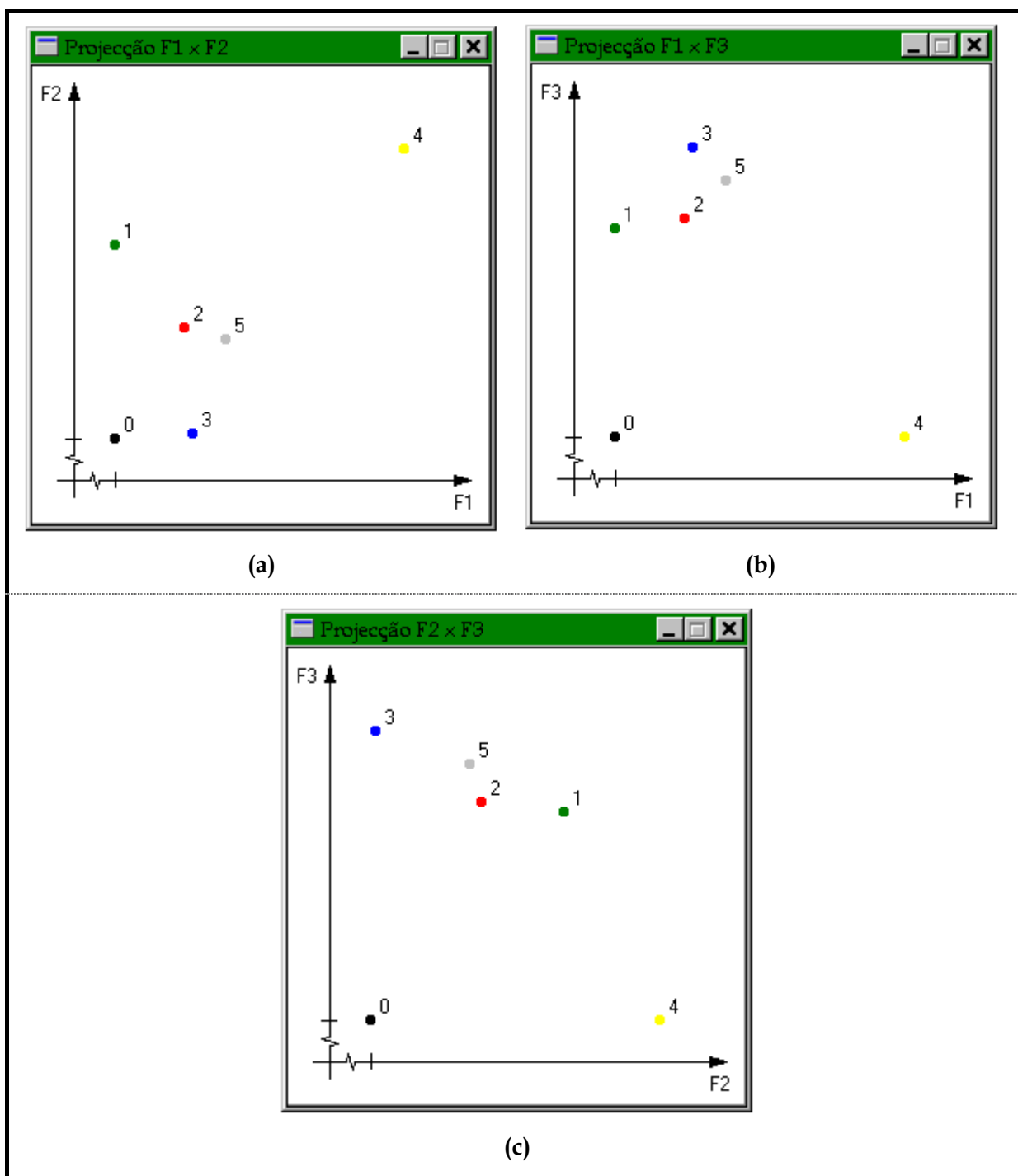


Fig. 28 – Tri-objectivo : projecção em (a) F1x F2, (b) F1x F3 e (c) F2x F3.

Pela análise das cinco soluções não dominadas já encontradas, o AD resolveu efectuar mais uma pesquisa. O resultado foi a determinação de uma outra solução (Fig. 29) :

$$\text{Solução 6 (preta)} = [1, 28, 36, 7, 50] \implies (1725, 1516, 2220).$$

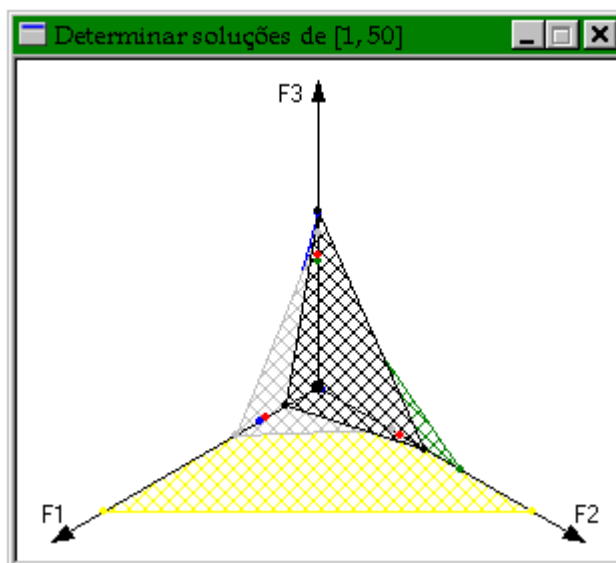


Fig. 29 – Tri-objectivo : sexta pesquisa no Espaço Total.

Com este resultado, o AD resolveu terminar com a pesquisa de soluções não dominadas em todo o espaço dos objectivos, uma vez que esta última solução o satisfaz, não havendo necessidade de prosseguir com a pesquisa. Desta forma, a solução que melhor reflecte as suas preferências é a solução 6.

7.2.2. Procura no Contorno Convexo e em Zonas de Desníveis de Dualidade

A Fig. 30 apresenta as três primeiras soluções do Contorno Convexo (vértices), que optimizam cada um dos objectivos separadamente e a solução ideal :

$$\text{Solução 1} = [1, 34, 24, 50] \quad ==> (1260, 1734, 1733)$$

$$\text{Solução 2} = [1, 21, 8, 2, 50] \quad ==> (2106, 884, 2885)$$

$$\text{Solução 3} = [1, 13, 47, 48, 24, 50] \quad ==> (4381, 2160, 527)$$

$$\text{Solução 0} = [] \quad ==> (1260, 884, 527).$$

O ponto central do gráfico corresponde à solução ideal, a verde está representada a solução 1 (ótimo do objectivo 1), a vermelho a solução 2 (ótimo do objectivo 2) e a azul a solução 3 (ótimo do objectivo 3). Note-se que qualquer destas soluções ocupa apenas um dos planos do gráfico, pois a outra coordenada é igual a um dos valores do ponto central (solução ideal).

Ao contrário do problema bi-objectivo, neste caso nada se pode concluir a partir dos três primeiros vértices (1, 2 e 3), relativamente à gama de valores que as soluções não dominadas podem atingir. De facto, pela análise destas três soluções, apenas se conhecem os valores mínimos que qualquer função pode atingir, mas em relação aos valores máximos (não dominados), isso já não é possível.

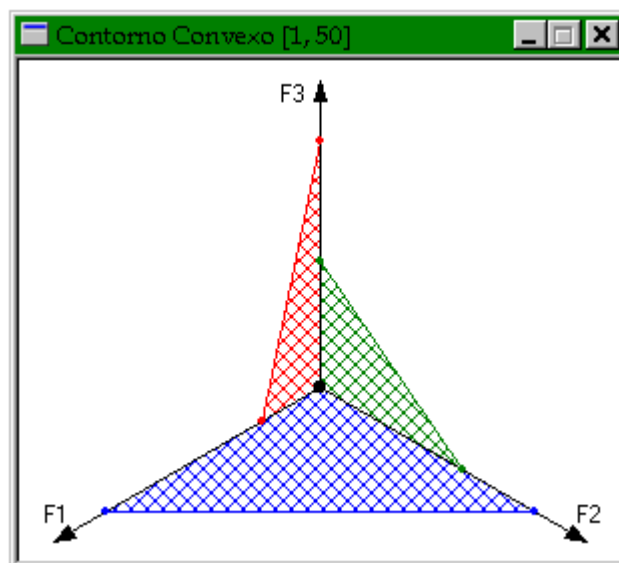


Fig. 30 – Tri-objectivo : primeira pesquisa no Contorno Convexo.

Como qualquer uma destas três soluções não satisfaz o AD, decidiu-se procurar um outro vértice, utilizando como direcção de pesquisa o gradiente do plano que contém os vértices 1, 2 e 3 (são adjacentes). Desta pesquisa resultou um outro vértice (Fig. 31) :

Solução 4 (amarelo) = [1, 28, 29, 17, 50] ==> (2092, 903, 2203).

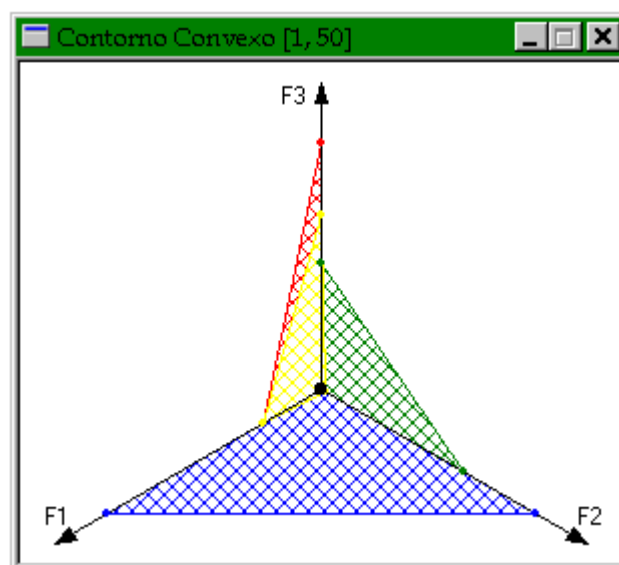


Fig. 31 – Tri-objectivo : segunda pesquisa no Contorno Convexo.

Com a determinação do novo vértice, 1, 2 e 3 deixaram de ser adjacentes entre si, passando a existir três combinações de vértices adjacentes : (1, 2, 4), (1, 3, 4) e (2, 3, 4).

Como as soluções existentes ainda não satisfazem o AD, decidiu-se pesquisar um outro vértice, utilizando o gradiente do plano que contém os vértices 1, 2 e 4 como direcção de pesquisa, da qual não resultou qualquer solução. Desta forma, aqueles três vértices são definitivamente adjacentes entre si, formando uma Zona de Desnível de Dualidade : [1, 2, 4].

Em consequência do resultado anterior, o AD decidiu procurar outro vértice, escolhendo como direcção de pesquisa o gradiente formado pelo plano que contém os vértices 1, 3 e 4. Desta pesquisa (Fig. 32), resultou o vértice 5 (prateado) :

$$\text{Solução 5} = [1, 28, 29, 2, 50] \implies (2013, 1371, 1790).$$

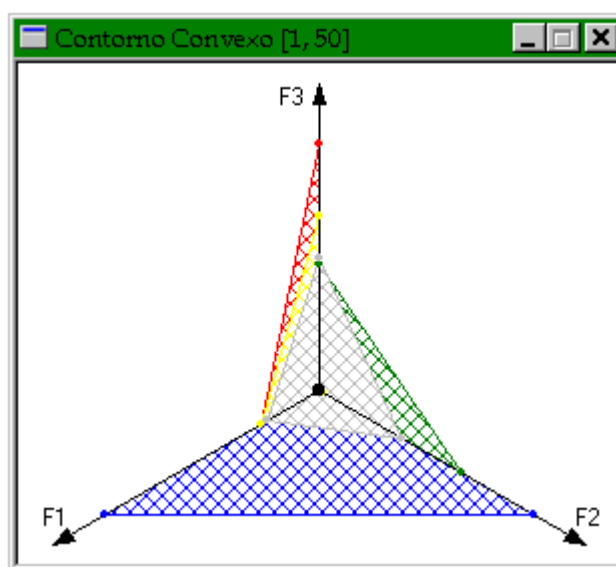


Fig. 32 – Tri-objectivo : terceira pesquisa no Contorno Convexo.

Como foi encontrado um vértice, os vértices 1, 3 e 4 deixaram de ser adjacentes entre si, passando a existir sete combinações de vértices adjacentes : (2, 3, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 5), (2, 4, 5) e (3, 4, 5), e uma definitivamente adjacente : (1, 2, 4).

O AD, após analisar as soluções já encontradas, decidiu procurar mais soluções do Contorno Convexo. Utilizando o gradiente do plano que contém os vértices 1, 2 e 5, como direcção de pesquisa de mais soluções, foi encontrado um vértice já existente, mas diferente dos que definem o referido plano. Isto implica que aqueles vértices não são definitivamente adjacentes, não definindo, desta forma, uma Zona de Desnível de Dualidade. O mesmo resultado foi obtido quando se utilizaram os gradientes dos planos que contém os vértices 2, 3 e 5, e 2, 4 e 5. Portanto, estas combinações de vértices também não constituem Zonas de Desníveis de Dualidade.

Resultado sensivelmente diferente foi obtido quando se utilizaram, como direcções de pesquisas, os gradientes dos planos que contém os vértices 1, 3 e 5; 1, 4 e 5; 2, 3 e 4; 3, 4 e 5. De

facto, com qualquer uma daquelas direcções, apesar de não se determinar qualquer novo vértice, foi encontrado um dos vértices que constitui o respectivo plano. Desta forma, e como as componentes do gradiente são todas positivas, os vértices que pertencem a cada uma daquelas combinações são definitivamente adjacentes entre si, constituindo, assim, uma Zona de Desnível de Dualidade. Portanto, para além da já conhecida Zona de Desnível de Dualidade [1, 2, 4], existem mais quatro : [1, 3, 5], [1, 4, 5], [2, 3, 4] e [3, 4, 5].

A Fig. 33 mostra as soluções do Contorno Convexo (vértices) do problema que foram encontradas, as quais são apresentadas num gráfico (a) e numa tabela (b).

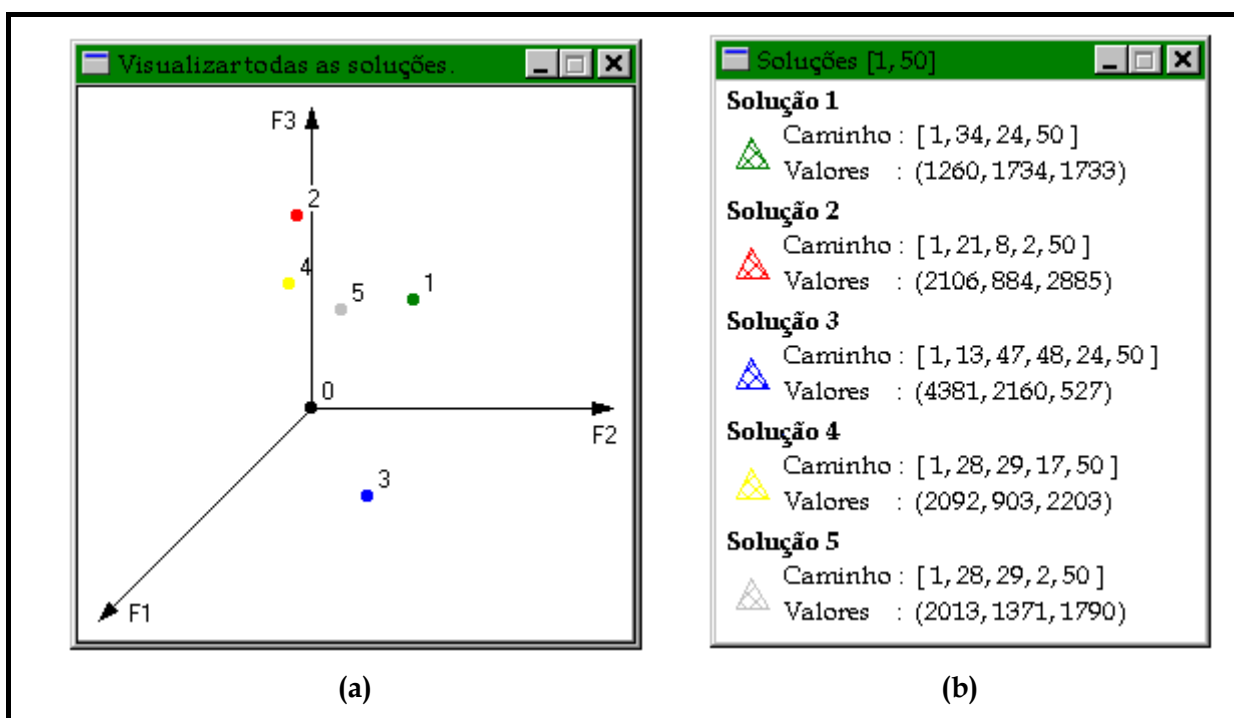


Fig. 33 – Tri-objectivo : (a) gráfico e (b) tabela com todos os vértices.

Observando a Fig. 33.(a) pode-se concluir que se as soluções ali representadas fossem projectadas no plano $F2 = 0$, talvez se percebesse melhor a sua amplitude. Para tal, analise-se a Fig. 34, onde os vértices estão projectados no plano $F1 \times F3$ ($F2=0$).

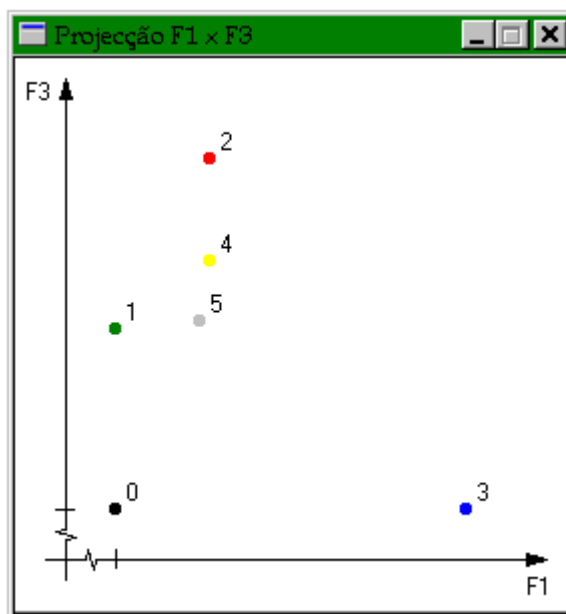


Fig. 34 – Tri-objectivo : projecção dos vértices no plano F2 = 0.

Ao analisar as soluções já encontradas, o AD decidiu pesquisar mais soluções não dominadas, mas agora numa das Zonas de Desníveis de Dualidade existentes (uma vez que não é possível determinar mais soluções do Contorno Convexo), que traduza a região que mais lhe interessa. Desta forma, resolveu analisar a Zona de Desnível de Dualidade definida pelos vértices 1, 2 e 4. Na primeira pesquisa de soluções não dominadas foi encontrada uma nova solução (Fig. 35) :

$$\text{Solução 6 (preta)} = [1, 28, 36, 7, 50] \implies (1725, 1516, 2220).$$

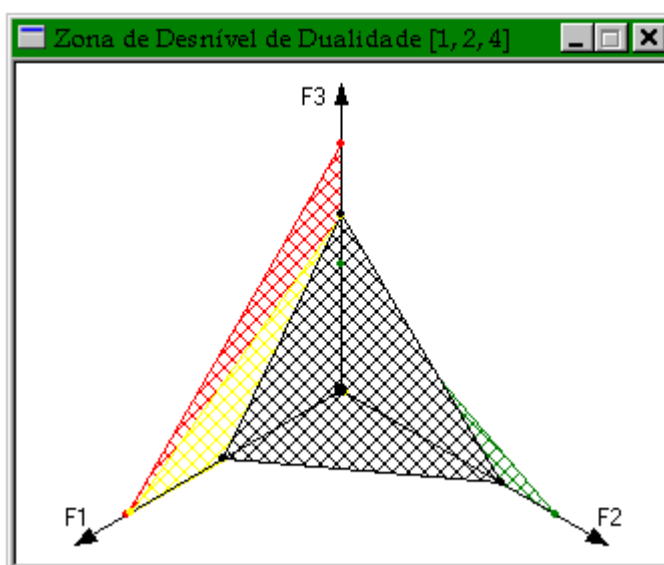


Fig. 35 – Tri-objectivo : primeira pesquisa numa Zona de Desnível de Dualidade.

Apesar desta solução satisfazer razoavelmente o AD, este indicou uma nova pesquisa nesta Zona de Desnível de Dualidade, a qual não teve êxito, uma vez que não existem mais soluções não dominadas nesta Zona de Desnível de Dualidade (Fig. 36).

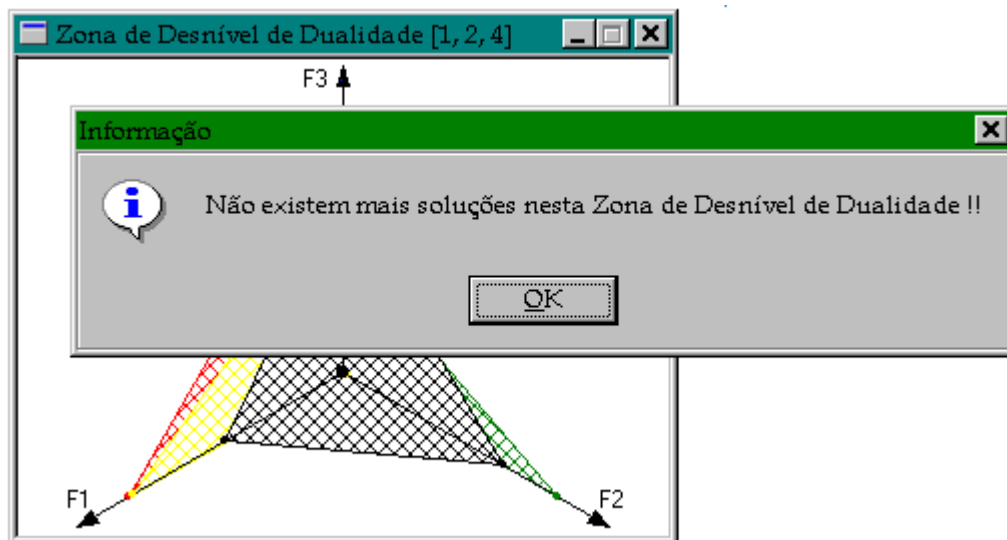


Fig. 36 – Tri-objectivo : segunda pesquisa numa Zona de Desnível de Dualidade.

Apesar da solução 6 satisfazer o AD, podendo desta forma escolhê-la como solução final, suponhamos que ele decidiu fazer uma nova pesquisa de soluções numa outra Zona de Desnível de Dualidade, esperando que possa ser encontrada uma solução que lhe agrade ainda mais. Desta forma, resolveu analisar a Zona de Desnível de Dualidade definida pelos vértices 3, 4 e 5. O resultando foi a determinação de um nova solução (Fig. 37) :

Solução 7 (lilás) = [1, 34, 11, 17, 50] ==> (2455, 1322, 2011).

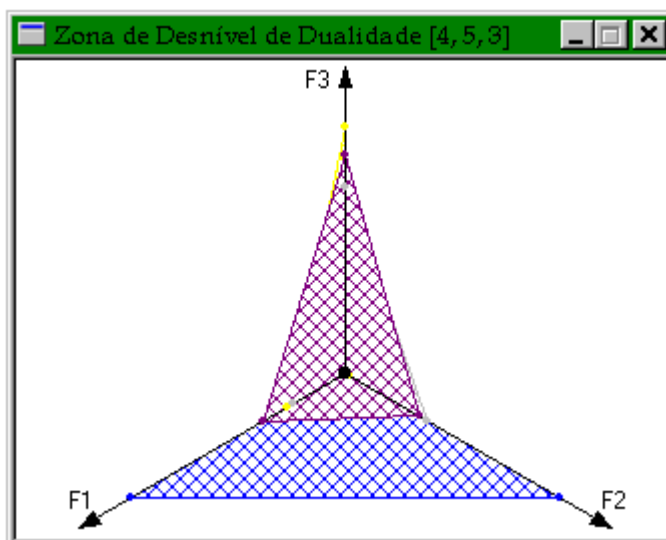


Fig. 37 – Tri-objectivo : primeira pesquisa numa Zona de Desnível de Dualidade.

Ao analisar a solução encontrada, o AD decidiu escolher a solução 7 como solução final, ou seja, de acordo com as suas preferências, esta é a melhor solução de compromisso encontrada.

No entanto, se tivesse dúvidas relativamente a outras soluções encontradas noutras Zonas de Desníveis de Dualidade ou no Contorno Convexo, o AD tinha a possibilidade de visualizar todas as soluções num único gráfico (Fig. 38.(a)) ou numa tabela (Fig. 38.(b)).

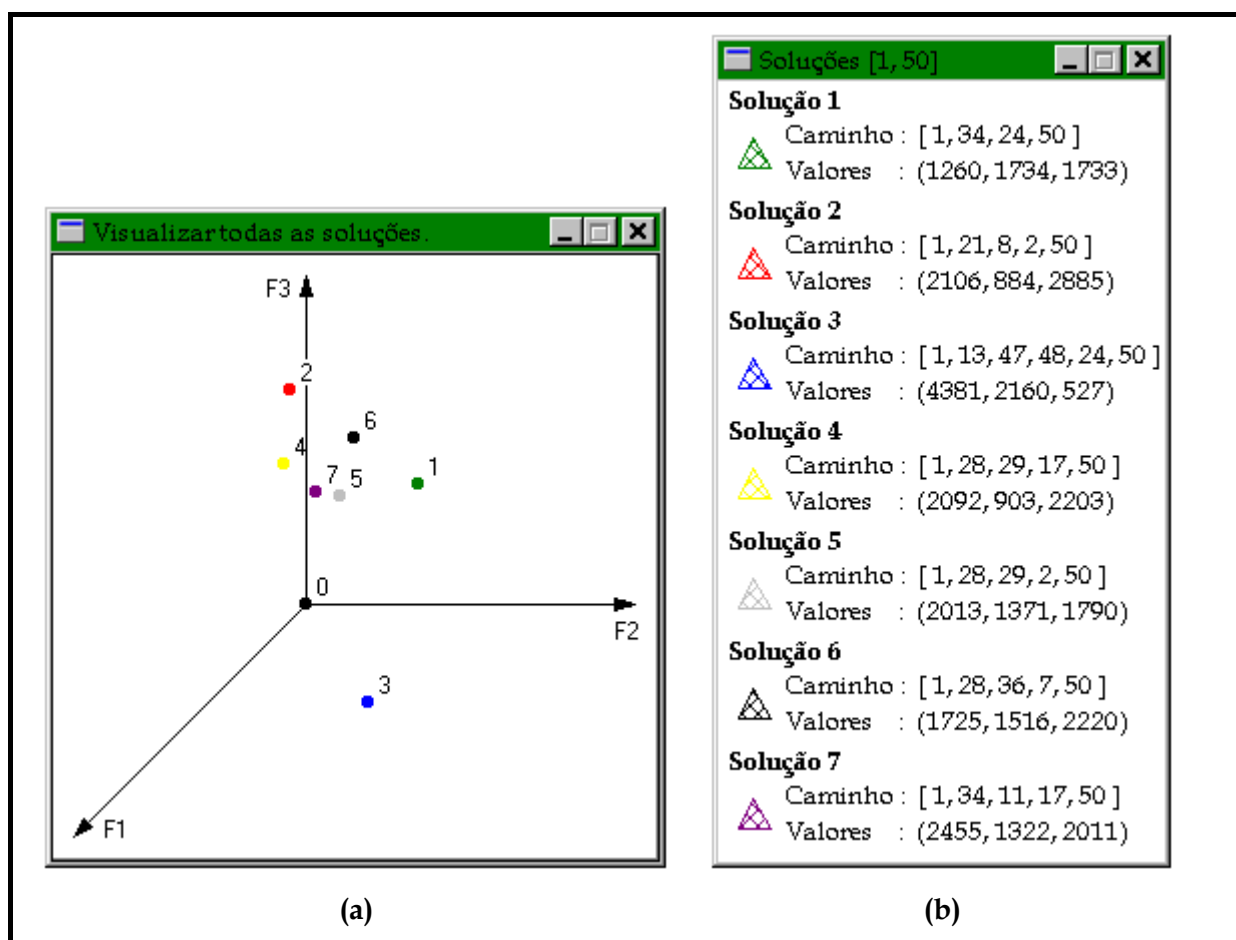


Fig. 38 – Tri-objectivo : (a) gráfico e (b) tabela com todas as soluções.

Ou então, podia ainda analisar as soluções não dominadas encontradas vistas segundo um outro prisma, como é o caso das projecções. Ou seja, pode-se analisar as soluções mediante apenas os valores de quaisquer dois objectivos : considerando os objectivos 1 e 2 (Fig. 39.(a)), os objectivos 1 e 3 (Fig. 39.(b)) e os objectivos 2 e 3 (Fig. 39.(c)).

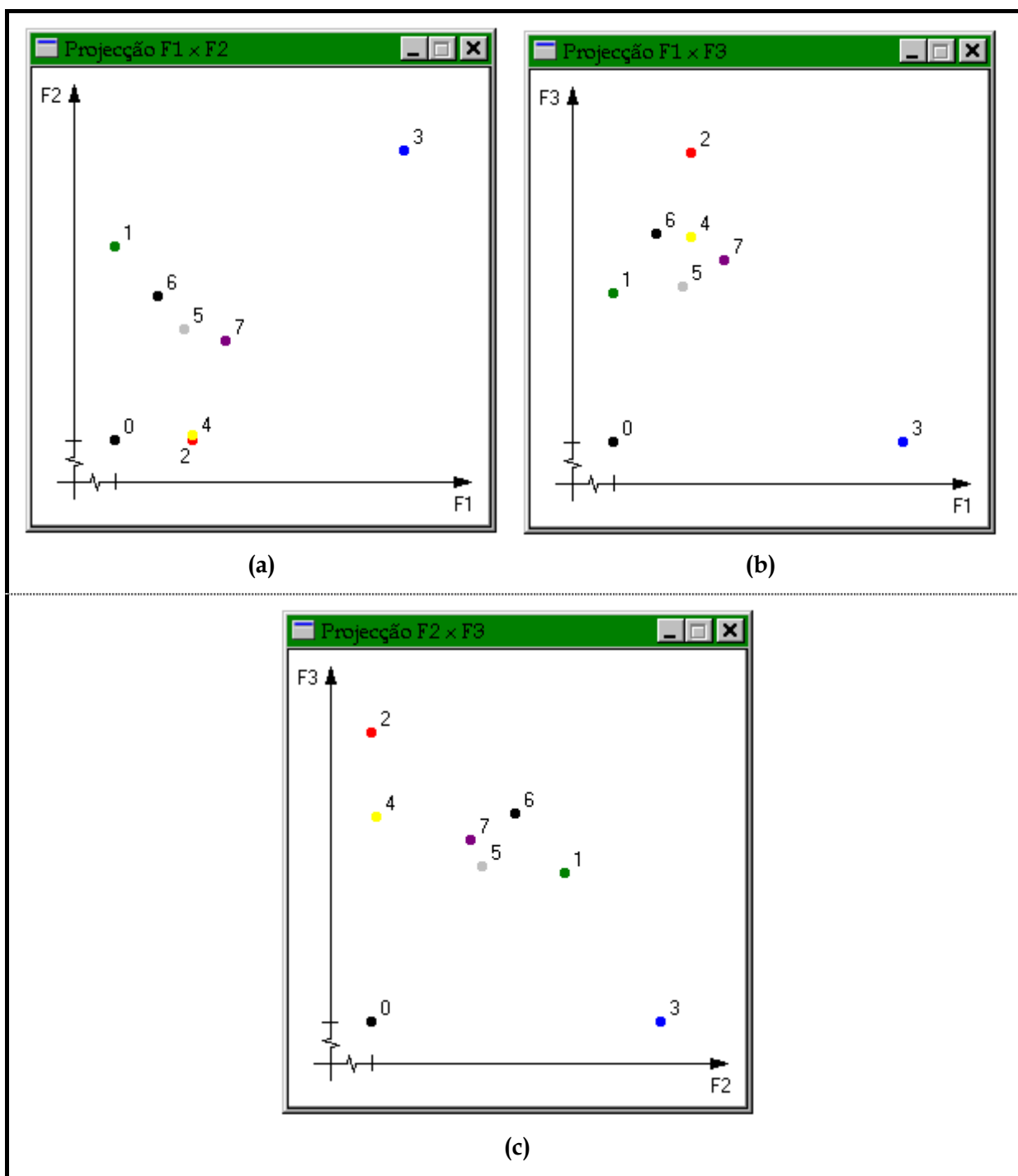


Fig. 39 – Tri-objectivo : projecção em (a) $F1 \times F2$, (b) $F1 \times F3$ e (c) $F2 \times F3$.

Por outro lado, refira-se que, caso o AD não ficasse satisfeito com as soluções que foram encontradas, podia continuar com a pesquisa na Zona de Desnível de Dualidade ([3, 4, 5]), ou então analisar noutras Zonas de Desníveis de Dualidade.