
Capítulo 4

Análise de Robustez em Optimização Evolucionária Multi-objectivo

1. Introdução

Embora a principal finalidade do estudo de problemas de optimização seja, em geral, a de determinar as soluções óptimas globais (uma única função objectivo) ou as soluções óptimas de Pareto globais (múltiplas funções objectivo), muitas vezes estas soluções não têm interesse do ponto de vista da sua exploração prática se forem sensíveis a perturbações nos dados do modelo.

Desta forma, se uma solução é muito sensível a perturbações que ocorram na sua vizinhança então, quando implementada, pode resultar num conjunto de valores das funções objectivo diferentes relativamente à solução do modelo. Assim, estas soluções têm menor importância prática e deve ser dado maior relevo à determinação das denominadas *soluções robustas*, isto é soluções cujo desempenho é menos sensível a perturbações.

Embora a definição de solução robusta não seja uniforme na literatura, existe um ponto comum: uma solução robusta deverá comportar-se razoavelmente bem em condições (ligeiramente) diferentes, o que significa que tem mais possibilidades de ser imune a pequenas alterações nas condições para que foi projectada.

2. Optimização evolucionária em ambientes incertos

Pelas suas próprias características os algoritmos evolucionários permitem resolver problemas de optimização na presença de diversas fontes de incertezas. Jin e Branke

(2005) apresentaram recentemente uma revisão das abordagens propostas de optimização evolucionária em ambientes incertos, na qual os métodos para tratamento da incerteza em optimização evolucionária podem ser categorizados nas seguintes quatro classes: *função de aptidão perturbada*, *função de aptidão aproximada*, *função de aptidão com variação temporal* (ou em *ambientes dinâmicos*) e *análise de robustez*.

2.1. Função de aptidão perturbada

O facto de os dados do problema serem incertos leva a que a avaliação da aptidão de um indivíduo esteja sujeita a perturbações. Estas perturbações podem ter diferentes origens, tais como erros nas medições sensoriais ou simulações aleatórias.

Matematicamente, uma função de aptidão perturbada pode ser formulada da seguinte forma (Jin e Branke (2005)):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) + \mu) p(\mu) d\mu = f(x), \quad \mu \sim N(0, \sigma^2) \quad (1)$$

em que x é um vector de parâmetros que podem ser alterados pelo algoritmo (muitas vezes designado como *variáveis de projecto*), $f(x)$ é uma função de aptidão sem variação temporal e μ é a perturbação adicionada (que muitas vezes se considera seguir uma distribuição normal de média 0 e variância σ^2).

Também se pode considerar uma perturbação não Gaussiana, como é o caso da perturbação distribuída de Cauchy (Arnold e Beyer (2003)). No entanto, não se observou qualquer diferença qualitativa no desempenho de uma estratégia evolucionária na presença de perturbação Gaussiana ou de Cauchy (Jin e Branke (2005)).

O ideal seria os algoritmos evolucionários trabalharem com a função de aptidão esperada $F(x)$ e não serem "enganados" devido à presença de perturbações. No entanto, durante a optimização, o único valor de aptidão mensurável é o estocástico $f(x) + \mu$. Na prática, porém, a função de aptidão esperada (1) é muitas vezes aproximada por uma média de um número de amostras aleatórias

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x) + \mu_i) \quad (2)$$

em que N é o tamanho da amostra e $\hat{F}(x)$ é uma estimativa de $f(x)$.

A função de aptidão perturbada é usada em muitas abordagens evolucionárias, em áreas tão diferentes como, por exemplo, redes neuronais, robótica e optimização de processos.

A aplicação de algoritmos evolucionários em ambientes com perturbação tem sido o tema de muitos artigos de investigação. Pode-se encontrar uma análise teórica mais detalhada da influência da perturbação no desempenho das estratégias evolucionárias em Arnold (2002) e Beyer (2000), assim como em Arnold (2001) que apresenta um breve

resumo dos trabalhos existentes. Existe também disponível na internet uma lista de referências a artigos relacionados com este tópico, com actualização permanente, no sítio: http://www.soft-computing.de/noise_robust.html.

Em termos metodológicos, foram adoptadas as seguintes abordagens para tratar as funções de aptidão perturbadas (Jin e Branke (2005)): *cálculo explícito da média*, *cálculo implícito da média* e *modificação do mecanismo de selecção*.

2.1.1. Cálculo explícito da média

Uma abordagem usual para reduzir a influência da perturbação é estimar a aptidão através do cálculo da média de um número de amostras obtidas ao longo do tempo (*cálculo da média no tempo*). Aumentar o tamanho da amostra é equivalente a reduzir a variância da aptidão estimada. Em abordagens simples, o número de unidades da amostra (tamanho da amostra) para cada indivíduo é predefinido e constante. Uma vez que cada avaliação da amostra (cálculo da aptidão) é muito dispendiosa, é preferível reduzir o tamanho da amostra o mais possível sem, no entanto, degradar o desempenho dos algoritmos associados a estas abordagens.

Aizawa e Wah (1993) e Aizawa e Wah (1994) foram dos primeiros a sugerir que o tamanho da amostra deveria ser adaptado durante a execução do algoritmo, propondo dois tipos de adaptação: aumentar o tamanho da amostra em função do número de gerações e usar o tamanho da amostra mais elevado para os indivíduos com maior variância estimada.

Branke e Schmidh (2003) e Branke e Schmidh (2004) propuseram também abordagens de adaptação dos tamanhos das amostras, que consistem em tomar várias amostras dos indivíduos que participam na selecção por torneio até que a diferença normalizada do valor de aptidão entre estes dois indivíduos (calculada dividindo a diferença dos valores de aptidão obtidos pelo desvio padrão da diferença) esteja abaixo de um certo limiar. Desta forma, os tamanhos das amostras vão sendo reduzidos até um valor mínimo requerido que permita fazer a distinção entre os indivíduos que participam na selecção por torneio.

Cantú-Paz (2004) propôs uma abordagem semelhante às de Branke e Schmidh, que se distinguem por tomar, uma de cada vez, as amostras do indivíduo com maior variância observada e por usar testes estatísticos padrão para seleccionar o vencedor do torneio com certa probabilidade.

Visto que a redução do tamanho da amostra leva também à redução do custo computacional do cálculo da média no tempo, uma abordagem alternativa é calcular a aptidão através do cálculo da média na vizinhança do ponto a ser avaliado (*cálculo da média no espaço*) (Branke et al. (2001), Sano e Kita (2000), Sano e Kita (2002) e Sano

et al. (2000)). Para este efeito, têm também sido construídos modelos de pesquisa local. Os motivos para substituir o cálculo da média no tempo pelo cálculo da média no espaço, é que a perturbação na vizinhança tem as mesmas características da perturbação no ponto a ser avaliado e o relevo da função de aptidão é localmente regular.

2.1.2. Cálculo implícito da média

Uma vez que as áreas promissoras do espaço de pesquisa são testadas repetidamente pelo algoritmo evolucionário e existem, normalmente, muitas soluções semelhantes na população, quando o tamanho da população é elevado é muito provável que a influência da perturbação na avaliação de um indivíduo seja compensada pela perturbação de um indivíduo semelhante. Este efeito pode ser visto como um tipo de *cálculo implícito da média*. Desta forma, uma abordagem simples para reduzir a influência da perturbação na optimização é usar uma população de grande dimensão (Fitzpatrick e Grefenstette (1988)). Miller e Goldberg (1996) mostraram que quando o tamanho da população é infinito, a selecção proporcional à aptidão não é afectada pela perturbação. Rattray e Shapiro (1997) estudaram a utilização de algoritmos genéticos com população de tamanho finito e mostraram que o aumento do tamanho da população reduz os efeitos da perturbação Gaussiana na selecção de Boltzmann¹⁰.

Foram também desenvolvidos modelos teóricos que permitem optimizar, simultaneamente, o tamanho da população e o tamanho da amostra (Miller e Goldberg (1996) e Miller (1997)), os quais são baseados no trabalho de Goldberg et al. (1992).

2.1.3. Selecção modificada

Muitos autores têm sugerido modificar o processo de selecção de forma a combater a perturbação. Um exemplo é impor, nas estratégias evolutivas, um limiar durante a selecção determinística (Markon et al. (2001)), isto é, um descendente será aceite se e só se a sua aptidão for melhor do que as dos seus pais em, pelo menos, um limiar predefinido.

A incerteza causada pela perturbação tem sido também estudada em optimização multi-objectivo, na qual é usada a dominância de Pareto na selecção dos indivíduos.

Teich (2001) propôs substituir a ordenação de Pareto de um indivíduo pela sua probabilidade de ser dominado. Para tal, o autor estendeu técnicas de exploração do espaço baseadas na dominância de Pareto, a casos onde uma ou várias das funções objectivo estão sujeitas a incertezas modeladas por intervalos.

¹⁰ O mecanismo de selecção de Boltzmann caracteriza-se por ser aleatório e com distribuição proporcional.

Hughes (2001) propôs também substituir a ordenação de Pareto de um indivíduo pela sua probabilidade de ser dominado. O autor calculou o erro esperado a ser usado na dominância de Pareto determinístico, de acordo com a perturbação nos dados associados às funções objectivo.

2.1.4. Casos relacionados

Têm sido estudados importantes casos relacionados com a pesquisa eficiente, a convergência e a auto-adaptação, tanto de algoritmos evolucionários como de outros algoritmos heurísticos de pesquisa, na resolução de problemas sujeitos a perturbações. Baum et al. (1995) provaram que, para uma classe de problemas simples sujeitos a perturbações, os Algoritmos Genéticos têm melhor desempenho do que muitos métodos de pesquisa local. Arnold e Beyer (2003) compararam as estratégias evolucionárias com outras meta-heurísticas de pesquisa local e mostraram que as estratégias evolucionárias têm clara vantagem em ambientes perturbados.

Enquanto que a maioria dos investigadores se concentrou na redução da influência da perturbação nas avaliações da aptidão, alguns artigos descrevem que a perturbação, até um certo nível, pode ajudar a melhorar o desempenho dos Algoritmos Evolucionários e de outros métodos de pesquisa heurísticos, porque permitem que os algoritmos saiam de óptimos locais.

As funções de aptidão perturbadas têm também sido investigadas com outros tipos de meta-heurísticas, como é o caso do arrefecimento simulado, colónia de formigas e pesquisa tabu (ver Jin e Branke (2005)).

Goh e Tan (2006) investigaram as consequências da perturbação em algoritmos evolucionários multi-objectivo, dando particular atenção a populações com aptidão e diversidade dinâmicas. Partindo de investigações empíricas, os autores propuseram três características para a manipulação da perturbação, de forma a melhorar a robustez e o desempenho dos algoritmos evolucionários multi-objectivo: um operador de perturbação dirigido pelo conhecimento baseado na experiência, uma estratégia de selecção e adaptação do gene, e um modelo de armazenamento possibilístico. O operador adapta a magnitude e a direcção da variação de acordo com as experiências do passado para acelerar a convergência. A estratégia melhora a pesquisa evolucionária para fugir à convergência prematura em ambientes com perturbação. O modelo de armazenamento possibilístico é baseado no conceito de medidas de possibilidades e necessidades (usando conjuntos difusos) para tratar problemas com incertezas. Neste estudo, a perturbação adicionada é implementada como uma distribuição normal de média zero, no espaço dos objectivos. Isto é, $F(x) = f(x) + N(0, \sigma^2)$, onde σ^2 representa o nível de perturbação

presente, N denota a função de distribuição normal, $F(x)$ e $f(x)$ denotam a função objectivo com e sem perturbação adicionada, respectivamente.

2.2. Função de aptidão aproximada

Quando o cálculo da função de aptidão é muito dispendioso ou não está disponível uma função de aptidão analítica, as funções de aptidão são muitas vezes aproximadas e baseadas nos dados gerados pelas experiências ou simulações. As funções de aptidão aproximadas são também conhecidas como *meta-modelos* ou *substitutas*. Como sugeriu Jin e Sendhoff (2002), um meta-modelo deveria ser usado, normalmente, juntamente com a função de aptidão original. Neste caso, a função de aptidão a ser otimizada pelos algoritmos evolucionários tornar-se-ia (Jin e Branke (2005))

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se é usada a função de aptidão original} \\ f(x)+E(x), & \text{se é usado um meta-modelo} \end{cases} \quad (3)$$

em que $E(x)$ é o erro de aproximação do meta-modelo.

A diferença mais importante entre uma função de aptidão perturbada e uma função de aptidão aproximada é que o erro na função de aptidão aproximada é determinístico (uma vez que o meta-modelo foi idealizado) e regular (isto é, com média diferente de zero). No entanto, o erro não pode ser reduzido recalculando a função de aptidão aproximada. Em vez disso, o erro tem de ser tratado usando a verdadeira função de aptidão em vez da aproximada. Desta forma, o desafio é encontrar o equilíbrio certo entre as avaliações com a função de aptidão aproximada, que são de baixo custo mas com erros, e com a função de aptidão verdadeira, que são dispendiosas mas precisas.

Nos últimos anos, tem-se assistido, na computação evolucionária, a um aumento de interesse na utilização de funções de aptidão aproximada. Para um estudo mais aprofundado acerca deste tópico, consultar Jin e Sendhoff (2002) e Jin (2005). Está também disponível na Internet uma lista de referências a artigos relativos a este tópico, em <http://www.soft-computing.de/amec.html>.

O uso de uma função de aptidão aproximada é motivado, principalmente, pelas seguintes razões (Jin e Branke (2005)):

- Cada avaliação da aptidão é extremamente demorada.
- Não é fácil encontrar disponível uma função de aptidão analítica total. Na computação evolucionária, a estimação da aptidão é uma consequência inerente ao facto de um indivíduo codificar apenas parte da solução e, desta forma, a qualidade do indivíduo não poder ser calculada com exactidão.
- Necessidade de avaliações adicionais da aptidão, por exemplo, no tratamento com funções de aptidão perturbadas ou na procura de soluções robustas. Os modelos

aproximados são muito úteis, no sentido de reduzir o custo computacional destas avaliações adicionais da aptidão.

- O relevo da função de aptidão é irregular. A hipótese básica é que se pode construir um meta-modelo global, capaz de aplanar os óptimos locais da função de aptidão original, de relevo irregular, sem alterar a localização do óptimo global.

2.2.1. Métodos de aproximação

Em computação evolucionária, podem ser adoptados vários níveis ou estratégias de aproximação para chegar à aptidão aproximada: *aproximação ao problema*, *aproximação funcional conduzida pelos dados*, e *herança, imitação e afectação da aptidão*.

A *aproximação ao problema* tenta substituir o enunciado original do problema por um que seja aproximadamente o mesmo, mas mais fácil de resolver.

Na *aproximação funcional*, é construída uma expressão alternativa e explícita para a função objectivo *baseada nos dados*, descrevendo a correspondência entre as variáveis de decisão e a qualidade da decisão. Neste caso, os modelos obtidos a partir dos dados são, muitas vezes, conhecidos como meta-modelos ou substitutos.

A *herança, imitação e afectação da aptidão* é um tipo de abordagem específica dos algoritmos evolucionários que consiste em guardar as avaliações da aptidão, em que a aptidão de um indivíduo é estimada a partir de outros indivíduos semelhantes. Na subclasse desta categoria conhecida como *herança da aptidão*, a aptidão é simplesmente herdada a partir dos pais. Na *imitação da aptidão*, os indivíduos são reunidos em vários grupos, em que apenas o indivíduo que representa cada grupo será avaliado usando a função de aptidão. Os valores da aptidão dos restantes indivíduos do grupo são estimados a partir do indivíduo representativo do grupo, com base numa medida de distância.

Nos algoritmos co-evolucionários de dois níveis (com duas populações), os indivíduos de uma das duas populações codificam apenas parte do problema e os seus valores de aptidão dependem sempre dos valores dos indivíduos da outra população. Para este caso, foram desenvolvidos métodos para estimar os valores de aptidão em sistemas co-evolucionários colaborativos, os quais são conhecidos como métodos de *afectação da aptidão*.

2.2.2. Mecanismos para incorporar meta-modelos

Os modelos que incorporam meta-modelos podem levar vantagem em quase todos os elementos dos algoritmos evolucionários, incluindo iniciação, cruzamento (recombinação), mutação e avaliação da aptidão (Jin e Branke (2005)):

- Utilização de modelos de aptidão aproximada na população inicial (Rasheed (2000)).
- Utilização de modelos de aptidão aproximada para reduzir a aleatoriedade nos operadores genéticos cruzamento e mutação (Abboud e Schoenauer (2002), Anderson e Hsu (1999) e Mutoh et al. (2003)).
- Utilização de modelos de aptidão aproximada nas avaliações da aptidão. Na maioria dos trabalhos de investigação, o modelo aproximado tem sido usado directamente nas avaliações da aptidão de forma a reduzir o número de cálculos da aptidão (Emmerich et al. (2002), El-Beltagy (1999), Jin et al. (2000) e Jin et al. (2002)). As avaliações da aptidão aproximada têm sido também aplicadas em optimização evolucionária multi-objectivo (Chafekar et al. (2004), Chung e Alonso (2004), Farina (2000) e Farina (2002)).

2.2.3. Controlo da evolução ou gestão de meta-modelos

A motivação fundamental para o uso de meta-modelos nas avaliações da aptidão é reduzir o elevado número destas avaliações, sem degradar a qualidade da solução final obtida. Para alcançar esta meta, os meta-modelos deverão ser combinados com a própria função de aptidão original, o que muitas vezes é conhecido como *controlo da evolução* ou *gestão do modelo*.

Muitas vezes, supõe-se que o modelo aproximado é de elevada precisão e, assim, a função de aptidão original não é totalmente usada no processo evolucionário. No entanto, a evolução que usa meta-modelos pode correr o risco de uma incorrecta convergência, se não controlar a evolução que usa a função de aptidão verdadeira (Jin et al. (2000)). Desta forma, deve-se dar maior atenção às estratégias de gestão dos modelos que podem controlar a evolução convenientemente.

As metodologias existentes para o controlo da evolução podem ser divididas, de um modo geral, em duas categorias: *baseadas no indivíduo* e *baseadas na geração*.

O *controlo da evolução baseado no indivíduo* consiste em controlar a evolução de forma que, na mesma geração, alguns indivíduos usem os meta-modelos para determinar os seus valores de aptidão e os restantes usem a verdadeira função de aptidão para o mesmo fim (ver Jin et al. (2000)). A questão principal destas metodologias é determinar que indivíduos devem usar o meta-modelo e quais devem usar a verdadeira função de aptidão.

No *controlo da evolução baseado na geração*, todos os indivíduos de uma mesma geração são avaliados, ou pela verdadeira função de aptidão, ou pelo meta-modelo. A questão principal destas metodologias é determinar em que gerações deve ser usada a verdadeira função de aptidão e em quais deve ser usado o meta-modelo.

Tem sido desenvolvida uma grande variedade de metodologias para controlo da evolução baseado no indivíduo, cujo passo comum consiste em pré-avaliar todos os indivíduos usando o meta-modelo, para depois se escolher um número de indivíduos para serem reavaliados (controlados) usando a função de aptidão verdadeira.

Estas metodologias podem ser classificadas de acordo com o tipo de escolha sobre os indivíduos a reavaliar, nas seguintes classes (Jin e Branke (2005)):

- *Escolha aleatória dos indivíduos*. Neste método, é seleccionado aleatoriamente um número de indivíduos da população. Neste caso, não é necessária uma pré-avaliação usando o meta-modelo.
- *Escolha dos melhores indivíduos de acordo com a pré-avaliação feita pelo meta-modelo*. Se for assumido que é melhor fazer-se a escolha usando o meta-modelo do que aleatoriamente, o que é uma hipótese muito débil pela qualidade do meta-modelo, é natural escolher-se os melhores indivíduos (isto é, os mais promissores) para serem reavaliados usando a função de aptidão verdadeira (Jin et al. (2000), Jin et al. (2002)). Normalmente, o número de indivíduos a serem reavaliados é predefinido e constante durante o processo evolucionário.
- *Escolha dos indivíduos mais incertos*. Por um lado, ao reavaliar os indivíduos mais incertos, a incerteza introduzida pela utilização dos meta-modelos poderá ser reduzida o máximo possível. Por outro lado, os indivíduos com elevado grau de incerteza estão muitas vezes localizados em áreas não exploradas. Desta forma, o uso deste tipo de selecção incentiva a pesquisa em áreas ainda não testadas. Uma medida de incerteza pode muitas vezes ser obtida calculando a distância do indivíduo considerado ao ponto mais próximo necessário à criação do meta-modelo. Uma outra medida pode ser escolher os indivíduos com as maiores probabilidades de melhoramento, em vez dos indivíduos com os melhores valores de aptidão. Pode também ser usada uma combinação dos critérios qualidade e incerteza na escolha dos indivíduos a serem reavaliados (Branke e Schmidh (2005)).
- *Métodos de pré-selecção*. Se o tamanho da população é POP, então o número de indivíduos escolhidos para serem reavaliados (POP_R) é, normalmente, menor ou igual a POP. No entanto, isto não acontece nos métodos denominados por *pré-selecção*, onde o número de descendentes gerados na estratégia evolucionária (POP_p) é maior do que POP. Estes POP_p indivíduos são todos avaliados usando o meta-modelo, sendo depois escolhidos POP para reavaliação usando a função de

aptidão verdadeira de acordo com uma combinação dos critérios qualidade e incerteza.

O método de pré-selecção é basicamente igual aos métodos que usam o meta-modelo para reduzir a aleatoriedade dos operadores genéticos cruzamento e mutação.

Um outro método interessante é aquele que consiste em escolher os indivíduos mais "representativos" para reavaliação, usando a verdadeira função de aptidão de acordo com a localização dos indivíduos. A abordagem básica consiste em agrupar os indivíduos da população num certo número de agrupamentos e depois escolher os indivíduos mais próximos do centro do respectivo agrupamento como seu representante (Jin e Sendhoff (2004)). Uma vantagem destes métodos é que pode ser obtido um bom equilíbrio entre pesquisa em regiões não testadas e pesquisa nas vizinhanças ("*exploration*" vs. "*exploitation*").

As metodologias de controlo da evolução baseadas na geração podem ser classificadas de acordo com o tipo de frequência do controlo, nas seguintes classes (Jin e Branke (2005)):

- *Frequência do controlo constante*. O controlo da evolução baseado na geração tem sido, muitas vezes, usado de tal modo que a função de aptidão verdadeira é aplicada em cada k gerações, onde k é um valor predefinido e constante durante o processo evolucionário. Não é muito prático usar a frequência do controlo constante, porque a precisão do modelo aproximado pode variar significativamente durante o processo de optimização. De facto, a predefinição da frequência do controlo da evolução pode causar fortes oscilações durante o processo de optimização devido ao grande número de erros do modelo.

Uma outra abordagem consiste em executar a optimização no meta-modelo até o processo evolucionário convergir. A solução de convergência é então reavaliada usando a função de aptidão verdadeira. Um inconveniente deste método é que o processo evolucionário pode facilmente convergir para um óptimo local.

- *Frequência do controlo adaptativa*. Em geral, a frequência do controlo da evolução deve depender da precisão do modelo aproximado. Foi sugerido por Nair e Keane (1998) um método para ajustar a frequência do controlo da evolução, baseado em metodologias de regiões promissoras, na qual é usada a abordagem baseada na geração. Foi também sugerido em Jin et al. (2001-b) uma metodologia para gestão de modelos aproximados, a qual foi aplicada a um problema de optimização bidimensional na área da aerodinâmica (Jin e Sendhoff (2002)).

Jin et al. (2000) efectuaram um estudo comparativo das estratégias de controlo da evolução, no qual usaram duas estratégias baseadas no indivíduo e uma baseada na geração. Estes autores verificaram que é mais eficaz escolher os melhores indivíduos de acordo com a aptidão aproximada para a reavaliação usando a função de aptidão verdadeira, do que os escolher aleatoriamente. Por outro lado, na escolha dos melhores indivíduos, verificaram que ambas as estratégias apresentam desempenhos semelhantes.

Jin e Sendhoff (2004) mostraram ser vantajoso, em comparação com as melhores estratégias, usar-se uma estratégia baseada no indivíduo na qual os indivíduos são escolhidos para reavaliação através de um algoritmo de agrupamentos.

Branke e Schmidh (2005) estudaram o uso de dois esquemas de aproximação local padrão, nomeadamente a interpolação e a regressão, os quais se baseiam nos indivíduos vizinhos já avaliados. Em cada geração, uma percentagem fixa da população é avaliada com a função objectivo real, enquanto que a aptidão dos restantes indivíduos é estimada. Os indivíduos a serem avaliados com exactidão são determinados de acordo com os seus valores de aptidão estimados e a incerteza. Os testes efectuados mostraram que este esquema de aproximação acelera a convergência, produzindo uma solução com a mesma qualidade mas com significativamente menos avaliações da função de aptidão verdadeira.

2.2.4. Convergência

Embora a optimização evolucionária que usa funções de aptidão aproximadas tenha tido sucesso em vários trabalhos de investigação, ainda falta fazer uma análise rigorosa à convergência destes métodos. Jin et al. (2000) orientaram um estudo empírico para a convergência dos algoritmos evolucionários, o qual mostrou que pode ser observada consistentemente uma correcta convergência, se forem efectuadas mais de 50% das avaliações da aptidão com a verdadeira função de aptidão. Também mostraram que as estratégias evolutivas convergem correctamente, na maioria dos casos, quando são controlados apenas 30% dos indivíduos escolhidos de acordo com um algoritmo de agrupamentos (Jin e Sendhoff (2004)).

2.3. Ambientes dinâmicos

Em problemas de optimização dinâmicos mono-objectivo, a função de aptidão apesar de ser determinística em qualquer instante, depende do momento t ; isto é,

$$F(x) = f_t(x) \tag{4}$$

Como consequência, também o óptimo se altera ao longo do tempo (os ambientes são dinâmicos).

Da mesma maneira, em problemas de optimização dinâmicos multi-objectivo, é de esperar que a frente óptima de Pareto resultante também se altere com o tempo (ou com as iterações do processo evolucionário).

Desta forma, o algoritmo evolucionário deve ser capaz de acompanhar, continuamente, a variação do óptimo (mono-objectivo) ou a frente óptima de Pareto (multi-objectivo), em vez de exigir repetidamente o reinício do processo de optimização. O desafio é reutilizar a informação vinda dos ambientes anteriores para acelerar o processo de optimização após ocorrer uma alteração.

2.3.1. Considerações gerais

Em muitos problemas de optimização do mundo real, a função objectivo, a instância do problema, ou as restrições podem alterar-se em qualquer instante e, assim, o óptimo daquele problema pode também variar. Se alguma destas entidades incertas for considerada no processo de optimização, então diz-se que é um *problema dinâmico* (Jin e Branke (2005)).

A forma mais simples de reagir a uma alteração do ambiente é olhar para cada alteração como se tratasse da chegada de um novo problema de optimização, que tem de ser resolvido imediatamente. Se houver tempo suficiente, esta é certamente uma alternativa viável. No entanto, muitas vezes o tempo para reoptimização é muito curto, e uma abordagem de reinício explícito assume que tem de ser identificada a entidade alterada, o que nem sempre é o caso.

Uma tentativa natural para acelerar a optimização após ocorrer uma alteração, poderá consistir em usar, de modo adequado, o conhecimento acerca do espaço de pesquisa anterior para avançar na pesquisa após a alteração. Se, por exemplo, for possível assumir-se que a nova solução final está "próxima" da antiga, será certamente benéfico restringir a procura à vizinhança da solução final antiga. Se é ou não vantajoso reutilizar a informação que vem do passado, tal depende da natureza da alteração. Se a alteração é radical e o novo problema tem poucas semelhanças com o anterior, então o reinício do processo poderá ser a única opção viável, e qualquer reutilização da informação recebida do antigo problema poderá ser prejudicial em vez de ajudar na pesquisa. No entanto, espera-se que, para a maioria dos problemas do mundo real, as alterações sejam muito ligeiras e, assim, seja possível ganhar-se um pouco ao transferir conhecimento do passado. A questão difícil de resolver é saber que informação deve ser guardada e como deve ser usada para acelerar a procura, após a alteração do ambiente.

Mas mesmo quando pode ser transferida informação útil, tem que ser garantido que o algoritmo de optimização é suficientemente flexível para responder às alterações. A maioria das meta-heurísticas converge durante a execução, pelo menos nos instantes em

que o ambiente é estático, perdendo assim a sua capacidade adaptativa. Assim, e apesar da transferência de conhecimento, uma boa meta-heurística para problemas de optimização dinâmica tem de permitir manter a adaptabilidade.

2.3.2. Tratamento de problemas de optimização dinâmica com AE

As primeiras aplicações de Algoritmos Evolucionários em ambientes dinâmicos foram descritas em Fogel et al. (1966). No entanto, foi só a partir do final da década de 1980 que este tópico se tornou um centro de interesse para muitos investigadores, tendo então surgido um grande número de publicações. Embora existam também outras meta-heurísticas de inspiração evolucionária aplicadas a problemas de optimização dinâmica, os Algoritmos Evolucionários são os mais utilizados.

Normalmente, a informação vinda do espaço de pesquisa anterior é transferida simplesmente guardando os indivíduos da população. Nalguns casos, quando a dimensão do problema se altera, os indivíduos têm de ser adaptados após a alteração ter ocorrido. Apesar destas necessárias alterações do genótipo, verificam-se melhorias significativas na velocidade de convergência e na qualidade das soluções, quando os indivíduos alterados (antigos) são reutilizados (Lin et al. (1997), Bierwirth e Mattfeld (1999)).

Na construção das gerações nos Algoritmos Evolucionários não é problemático a informação da aptidão estar desactualizada, devido às alterações do problema, porque geralmente nenhum indivíduo sobrevive para além de uma geração (todos os progenitores são substituídos pelos seus descendentes). Se os pais competissem com os filhos pela sobrevivência, uma possibilidade seria reavaliar todos os antigos indivíduos após ocorrer uma alteração (Smith e Vavak (1999)).

As principais abordagens que conduzem à convergência podem ser agrupadas nas quatro categorias seguintes (Jin e Branke (2005)):

- *Gerar diversidade após a alteração.* O Algoritmo Evolucionário é executado normalmente mas, logo que é detectada uma alteração no ambiente, são tomadas acções explícitas para aumentar a diversidade e, assim, facilitar a deslocação para a nova solução final. Uma representação típica desta abordagem é a hiper-mutação, onde a probabilidade de mutação é aumentada bruscamente por um grande número de gerações após o ambiente ter sido alterado. Na pesquisa local variável, a probabilidade de mutação é aumentada gradualmente. O problema destas abordagens é que aumentar a diversidade é basicamente equivalente a substituir informação dos indivíduos eleitos anteriormente por informação aleatória. Desta forma, é difícil determinar uma quantidade útil de diversidade: enquanto demasiada assemelha-se a reinício, muito pouca não resolve o problema da convergência.

- *Manter a diversidade durante toda a execução.* A convergência é evitada durante todo o tempo e é esperado que uma população alargada possa adaptar-se às alterações mais facilmente. Os mecanismos de partilha ou de multidão têm um modo mais elaborado de assegurar a diversidade. Embora existam algumas abordagens muito interessantes para este caso, a excessiva focalização na diversidade atrasa o processo de optimização.
- *Abordagens baseadas na memória.* O Algoritmo Evolucionário é provido de uma memória para ser capaz de retirar informação útil das gerações anteriores, o que parece especialmente útil quando a pesquisa regressa repetidamente aos locais anteriores. Este tipo de abordagem pode ser dividido em *memória explícita* e *memória implícita*. No caso de *memória explícita*, são definidas estratégias específicas para armazenar e recuperar informação. Nas abordagens com *memória implícita*, o Algoritmo Evolucionário é simplesmente equipado com uma representação redundante da qual fará o uso conveniente. Como foi notado por Branke (1999), e depois confirmado por outros investigadores, a memória é muito dependente da diversidade e deverá, assim, ser usada em combinação com as técnicas de preservação da diversidade.
- *Abordagens com várias populações.* A divisão da população em várias sub-populações permite localizar múltiplos picos no traçado da função de aptidão. Desta forma, as diferentes sub-populações mantêm informação acerca de várias regiões promissoras do espaço de pesquisa, podendo este processo ser visto como um tipo de memória diversa e auto-adaptativa.

Descrições mais detalhadas sobre Algoritmos Evolucionários aplicados a ambientes dinâmicos podem ser encontradas em Branke (2001-a), Morrison (2004) e Weicker (2003). Encontra-se também disponível uma vasta lista de referências sobre este tipo de abordagem em <http://www.aifb.uni-karlsruhe.de/~jbr/EvoDOP>.

2.3.3. Algumas abordagens

Enquanto que a maioria dos trabalhos iniciais eram de natureza empírica, ultimamente os autores tentam olhar para o problema segundo um ponto de vista teórico.

A primeira abordagem onde o problema é alvo de um estudo teórico encontra-se em Stanhope e Daida (1999), no qual foram derivadas as equações das probabilidades de transição de um AE (1+1) para o problema de "*dynamic bit matching*". Branke e Wang (2003) também consideraram este problema, e compararam analiticamente diferentes estratégias para tratar as alterações ambientais em *uma* geração (em vez de ser *entre* duas gerações) baseadas em métodos semelhantes, como em Stanhope e Daida (1999).

Bui et al. (2005) estudaram o uso de métodos de optimização evolucionária multi-objectivo, os quais são altamente eficientes na preservação da diversidade genética e na resolução de problemas de optimização mono-objectivo em ambientes dinâmicos. Um grande número de autores propuseram o uso de optimização evolucionária multi-objectivo para manterem a diversidade em problemas de optimização mono-objectivo, em que transformam o problema original (mono-objectivo) num outro de optimização multi-objectivo, adicionando uma função objectivo artificial. Na formulação do problema como multi-objectivo, usaram-se duas funções objectivo: a primeira é o objectivo original dinâmico e a segunda é um objectivo artificial para promover a diversidade (foram examinados seis possibilidades diferentes: dependentes do tempo, gerar valores aleatórios, inverter o sentido da optimização do objectivo, distância ao vizinho mais próximo, distância média para todos os indivíduos da população e distância para o melhor indivíduo da população). Os autores usaram o NSGA-II (ver secção 5.3.2.2 do capítulo 2). Todos os resultados foram comparados com um AG tradicional e duas variantes clássicas para ambientes dinâmicos (imigrantes aleatórios e uma variação do algoritmo de hiper-mutação). Os testes demonstraram que as abordagens propostas são competitivas, e que as que usaram como objectivo artificial a distância para todos os indivíduos e a distância para os melhores indivíduos têm muito melhor desempenho quando comparadas com as outras.

Surgiram, entretanto, também alguns estudos envolvendo outras meta-heurísticas aplicadas a problemas de optimização dinâmica. Por exemplo, a meta-heurística de colónia de formigas foi usada para resolver problemas de optimização do tipo caixeiro-viajante dinâmico (Guntsch e Middendorf (2000), Guntsch et al. (2000) e Guntsch et al. (2001)), e a optimização por enxames de partículas foi aplicada em ambientes dinâmicos (Kennedy e Eberhart (2001) e Mendes et al. (2004)).

Farina et al. (2004) desenvolveram alguns problemas de teste para optimização multi-objectivo dinâmica, tanto contínua como discreta, assim como sugeriram um algoritmo para resolver estes problemas. Estes problemas de teste foram construídos a partir de problemas de teste para optimização multi-objectivo estática (problemas em que os respectivos dados se mantêm constantes ao longo de todo o processo de optimização) e de parâmetros dependentes do tempo. Estes autores também sugeriram um algoritmo básico para procurar resolver tais problemas.

Neste artigo, também é discutido um problema de controlo adaptativo de um sistema temporal, onde o controlador final é dependente do tempo, uma vez que as propriedades do sistema são dependentes do tempo. Além disso, são considerados múltiplos objectivos para a optimização do controlador dinâmico, assim como é fornecida uma formulação para o problema de optimização multi-objectivo dinâmico resultante.

2.4. Robustez

A procura de soluções óptimas robustas é de grande importância para um grande número de aplicações reais (Paenke et al. (2006)):

- no processo de fabricação — como normalmente é impossível produzir um item exactamente conforme as especificações planeadas, o planeamento tem de permitir tolerâncias na produção (Greiner (1996) e Wiesmann et al. (1998));
- no escalonamento — um escalonamento deve ser capaz de tolerar pequenos desvios nos tempos de processamento estimados, ou ser capaz de adaptar as máquinas que falham (Jensen (2003) e Leon et al. (1994));
- no planeamento de circuitos — os circuitos devem trabalhar sob uma ampla gama de condições ambientais, tais como sob diferentes temperaturas (Thompson (1996));
- no planeamento das pás de turbinas — a turbina deve funcionar bem perante uma gama de condições; por exemplo, deve trabalhar com eficiência em diferentes velocidades (Ray e Tsai (2004) e Yamaguchi e Arima (2002)).

A maioria das abordagens evolucionárias para pesquisar soluções robustas consiste em otimizar a função de aptidão esperada, dada uma distribuição de probabilidade de perturbações. Apenas alguns estudos consideram o problema como multi-objectivo, consistindo a maioria deles em otimizar, separadamente, duas funções objectivo: o desempenho e a robustez. Segundo Jin e Branke (2005), a análise de robustez em optimização evolucionária pode ser dividida nas seguintes duas classes de abordagens: *optimização da função esperada* e *abordagens multi-objectivo*.

2.4.1. Optimização da função de aptidão esperada

Como as abordagens que usam esta estratégia são aplicadas apenas a problemas com um só objectivo, são também denominadas por optimização robusta mono-objectivo (Paenke et al. (2006)).

Apenas se vai estudar os casos em que as perturbações incidem sobre as variáveis de decisão do modelo. Formalmente, se x denota um vector de variáveis de decisão (solução) de dimensão n e $f(x)$ é a função de aptidão, então a *função de aptidão esperada* é definida da seguinte forma (Paenke et al. (2006)):

$$f_{\text{esp}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \delta) p(\delta) d\delta \quad (5)$$

onde δ é uma perturbação que é distribuída de acordo com a função de densidade com probabilidade $p(\delta)$ — $f_{\text{esp}}(x)$ é também denominada por *função de aptidão efectiva* (Tsutsui et al. (1996)).

Do mesmo modo, a *variância da função de aptidão* pode ser definida da seguinte forma (Paenke et al. (2006)):

$$f_{\text{var}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x+\delta) - f_{\text{esp}}(x))^2 p(\delta) d\delta. \quad (6)$$

Para problemas razoavelmente complexos, a função de aptidão esperada (5) e a variância da função de aptidão (6) não podem ser calculadas analiticamente, normalmente porque a função de aptidão $f(x)$ não tem disponível uma forma analítica fechada. Como alternativa, $f_{\text{esp}}(x)$ e $f_{\text{var}}(x)$ podem ser estimadas usando a simulação de Monte Carlo, isto é, construindo amostras sobre um certo número NR de realizações de δ . Por exemplo, para a função de aptidão esperada $f_{\text{esp}}(x)$ a correspondente simulação de Monte Carlo pode ser a seguinte (Jin e Branke (2005)):

$$\hat{f}_{\text{esp}}(x) = \frac{1}{\text{NR}} \sum_{i=1}^{\text{NR}} f(x+\delta_i). \quad (7)$$

No entanto, como cada amostra corresponde a uma avaliação da aptidão, esta abordagem não é viável, quando aquelas avaliações são muito dispendiosas (em termos de tempo de execução).

Apesar desta expressão (7) se parecer muito com a descrita em (2), para a função de aptidão perturbada, e destes dois casos serem muito semelhantes, existem algumas diferenças significativas. Enquanto que no caso da função de aptidão perturbada se supõe, normalmente, que a perturbação incide sobre os valores de aptidão ($f(x) + \delta_i$), na pesquisa de soluções robustas a incerteza encontra-se nas variáveis de decisão ($x + \delta_i$).

Uma solução óptima robusta não é necessariamente um óptimo de $f(x)$, mas existe, normalmente, um compromisso entre a qualidade e a robustez da solução.

Por outro lado, a dificuldade dos métodos de pesquisa de soluções robustas está em estimar o integral da equação (5) sobre todas as perturbações possíveis, uma vez que se supõe que a função de aptidão é conhecida e determinística, e que a incerteza é avaliada apenas *após* o processo de optimização ter terminado. Neste caso, é possível escolher adequadamente as perturbações δ usadas na aproximação em (7), as quais têm consequências nas estratégias da solução.

Como, na maioria dos casos, a formulação matemática da função de aptidão esperada (5) não está disponível numa forma fechada, o valor da função de aptidão esperada de um indivíduo tem de ser estimado baseado em $f(x)$. Isto é muito semelhante à estimação da função de aptidão em ambientes perturbados, o que implica que podem ser aplicadas abordagens semelhantes: *cálculo explícito da média* e *cálculo implícito da média*.

2.4.1.1. Cálculo explícito da média

A forma mais simples de estimar a função de aptidão esperada é através da simulação de Monte Carlo, isto é, através da média dos valores da função de aptidão sobre um número de amostras de perturbações geradas aleatoriamente na vizinhança da solução x a ser avaliada, $f(x+\delta)$ (Greiner (1996), Sebald e Fogel (1992), Thompson (1998) e Wiesmann et al. (1998)).

As abordagens deste tipo necessitam de um grande número de avaliações da aptidão adicionais, o que se torna impraticável na maioria dos problemas do mundo real. No entanto, têm sido propostos na literatura métodos para reduzir este número de avaliações (Paenke et al. (2006)):

- *Técnicas para redução da variância* — escolhendo as perturbações da amostra de forma adequada, em vez de aleatória, reduz-se a variância do estimador, permitindo uma estimativa mais adequada com menos amostras. Em Loughlin e Ranjithan (1999), Markon et al. (2001) e Branke (2001-b), é proposto o "*Latin Hypercube Sampling*" juntamente com a ideia de se usar as mesmas perturbações para todos os indivíduos numa geração.
- *Avaliando os indivíduos mais importantes várias vezes* — em Branke (1998), é sugerido avaliar os bons indivíduos muito mais vezes do que os maus, uma vez que os bons indivíduos têm mais possibilidades de sobreviver, e por esse motivo é benéfica uma estimativa mais precisa. Em Branke (2001-a) foi proposto que os indivíduos com elevada variação da aptidão devem ser avaliados várias vezes.
- *Usando outros indivíduos da vizinhança* — uma vez que as regiões promissoras do espaço de procura são pesquisadas várias vezes, é possível usar a informação relativa a outros indivíduos da vizinhança para estimar a aptidão esperada de um dado indivíduo. Em particular, Branke (1998) propôs registar a *história* de uma *evolução*, isto é, armazenar numa base de dados todos os indivíduos de uma execução do processo evolucionário com os correspondentes valores da aptidão, e usar a aptidão média ponderada dos indivíduos vizinhos que estão no histórico.

Provavelmente, a abordagem mais comum consiste em construir amostras de um número de pontos escolhidos aleatoriamente na vizinhança da solução x a ser avaliada, e depois tomar a média dos pontos desta amostra como o valor estimado da aptidão esperada de x (ver Branke (1998), Greiner (1996) e Wiesmann et al. (1998)).

Paenke et al. (2006) apresentaram uma abordagem que consiste em usar um modelo de aproximação para estimar a robustez de uma solução. Em vez de usarem a verdadeira função de aptidão na simulação de Monte Carlo, os autores usaram o modelo de aproximação para este fim. Em princípio, esta ideia poderia ser usada combinada com

qualquer modelo de aproximação apropriado, como redes neuronais artificiais, modelos de Kriging¹¹ ou processos Gaussianos. No entanto, nesta abordagem, os autores usaram modelos de aproximação local, os quais têm a vantagem de serem relativamente fáceis de construir e parecem também apropriados para aproximar o desempenho de uma solução perante uma distribuição de perturbações locais.

A ideia principal é calcular a aptidão média em abordagens mono-objectivo ou a variância da aptidão em abordagens multi-objectivo, baseando-se directamente nas soluções vizinhas da população (geração) corrente ou em toda a história da evolução. Usar as soluções vizinhas existentes para calcular a média e a variância da aptidão é apenas uma aproximação muito grosseira da simulação de Monte Carlo. Para resolver este problema, os autores sugeriram construir modelos computacionalmente eficientes usando as soluções disponíveis para substituir a verdadeira função de aptidão (que é dispendiosa) no cálculo da média e da variância dos valores de aptidão.

O algoritmo evolucionário proposto para procurar soluções robustas começa com um *historial* vazio e por coleccionar os dados durante a execução. Em cada geração, a função de aptidão verdadeira é calculada na localização dos indivíduos actuais, sendo depois estes dados armazenados no *historial*. Com esta estratégia, o número total de avaliações da função de aptidão verdadeira é igual ao número de gerações multiplicado pelo tamanho da população, que é o mesmo valor requerido para o algoritmo evolucionário padrão. Desta forma, não são necessárias avaliações adicionais da aptidão para avaliar a robustez.

Para a aproximação à aptidão, os autores usaram os métodos de interpolação e de regressão local, os quais são combinados com uma variedade de modelos de distribuição. Uma vez que os modelos de aproximação local são apenas de confiança numa pequena vizinhança do seu ponto de ajustamento, são necessários vários modelos para avaliar uma população. Os autores usaram duas estratégias simples: construir um modelo em redor de cada indivíduo da população e construir um modelo em redor de cada ponto da amostra. Apesar da segunda estratégia ser a mais adequada, também é muito mais dispendiosa em termos computacionais.

¹¹O modelo de Kriging é um interpolador estocástico que assume que os dados recolhidos de uma determinada população se encontram correlacionados no espaço. Isto é, se determinado ponto p tem um atributo r , é muito provável que se encontrem resultados muito próximos de r quanto mais próximos se estiver do ponto p . Porém, a partir de determinada distância de p , certamente não se encontrarão valores aproximados do atributo r porque a correlação espacial pode deixar de existir.

2.4.1.2. Cálculo implícito da média

Enquanto que todos os métodos referidos na secção anterior *explicitam* a média sobre um número de avaliações da aptidão, Tsutsui et al. (1996) e Tsutsui e Ghosh (1997) apresentaram a ideia de perturbar, de forma simples, as características dos fenótipos antes de avaliar a aptidão de um indivíduo. Usando o teorema do esquema ("schema theorem" de Goldberg (1989)) estes autores mostraram que, para algoritmos genéticos com uma população de tamanho infinito e usando selecção proporcional à aptidão, adicionar perturbações aleatórias às variáveis de decisão em cada geração é equivalente a otimizar a função de aptidão esperada. Tal como no cálculo da média implícita para o caso de funções de aptidão perturbada, o aumento do tamanho da população pode reduzir a influência da perturbação, e assim, garantir uma correcta convergência do algoritmo.

Tsutsui e Ghosh (1997) propuseram uma metodologia que estende a aplicação dos AGs a domínios que requerem a identificação de soluções robustas. Esta técnica, denominada por GA/RS³ ("*Genetic Algorithms with a Robust Solution Searching Scheme*"), determina soluções robustas, adicionando perturbações aos valores dos parâmetros do fenótipo, enquanto faz a avaliação dos indivíduos com a função de aptidão.

Na Natureza, a expressão do fenótipo de um organismo é determinada, em parte, pela descodificação do código genótipo dos genes dos cromossomas. Durante este processo de descodificação, podem existir algumas perturbações, por exemplo, causadas por uma temperatura anormal, por um desequilíbrio nutricional, pela existência de substância nociva, etc.. Se um indivíduo tiver fraca aptidão devido a estas características fenotípicas perturbadas, então não sobreviverá para gerar filhos. Desta forma, indivíduos e populações reprodutivas, mesmo tendo "bom" material genótipo, poderão extinguir-se se forem altamente sensíveis às perturbações das características fenotípicas. Por outro lado, em ambientes perturbados, as unidades reprodutoras que são robustas para aquelas perturbações poderão ter mais hipóteses de sobreviver. Tsutsui e Ghosh (1997) desenvolveram o GAS/RS³ com o objectivo de localizar soluções robustas usando esta metáfora de selecção da genética natural.

Existem abordagens que consideram a existência de perturbações no cálculo dos valores de aptidão, em que as perturbações são adicionadas à função de aptidão. Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ é um vector de parâmetros fenótipos, $f(x)$ é a função de aptidão e δ uma perturbação escalar, então a aptidão do individuo será $f(x) + \delta$. Quando se pretende detectar soluções robustas, adiciona-se a perturbação durante o processo de descodificação do código genótipo dos parâmetros do fenótipo. Por isso, para se adicionar

perturbação aos parâmetros do fenótipo x , parece razoável usar-se uma função de avaliação da forma $f(x + \delta)$, onde $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ é um vector aleatório.

Ong et al. (2006) apresentaram um algoritmo evolucionário baseado numa combinação de uma estratégia de optimização *max-min* com uma metodologia Baldwiniana sobre a região promissora (combinação de algoritmos evolucionários com técnicas de aproximação). Para reduzir o elevado custo computacional associado ao algoritmo evolucionário robusto, foram introduzidos modelos de substituição local para estimar a aptidão esperada e/ou variância da aptidão das possíveis soluções, em vez dos valores de aptidão verdadeiros.

2.4.2. Abordagens multi-objectivo

Das (2000) e Jin e Sendhoff (2003) demonstraram que, nalguns casos, optimizar a função de aptidão média (aptidão esperada) não é suficiente. Com a aptidão esperada como único objectivo, os desvios positivos ou negativos da aptidão verdadeira podem anular-se mutuamente na vizinhança de um ponto alvo. Assim, uma solução com elevada variabilidade da aptidão pode ser considerada robusta. No entanto, pode ser vantajoso considerar a aptidão esperada e a variância da aptidão como critérios de optimização separados, o que permite procurar soluções com diferentes compromissos entre desempenho e robustez.

Existem poucos estudos dedicados à optimização robusta multi-objectivo reportados na literatura. Alguns destes estudos são descritos a seguir.

Ray (2002) e Ray e Tsai (2004) propuseram abordagens para tratar problemas de optimização robusta com restrições, nas quais a robustez de uma solução é considerada durante o processo de pesquisa e não após determinar as soluções finais. Nestas abordagens, a procura de soluções robustas é tratada como um problema de optimização tri-objectivo, cujos objectivos são: o desempenho de uma solução, o desempenho médio dos seus vizinhos e o desvio padrão do desempenho dos seus vizinhos, em que o desempenho de uma solução é avaliado através do seu valor de aptidão verdadeiro. De modo a tratar a admissibilidade, Ray (2002) introduziu um esquema de tratamento das restrições baseado no conceito de dominância de Pareto que considera a admissibilidade da própria solução e a admissibilidade na sua vizinhança. Com este método resultam, eventualmente, soluções que são admissíveis e têm vizinhos admissíveis.

Jin e Sendhoff (2003) consideraram um problema de optimização bi-objectivo, cujos objectivos a maximizar são a robustez e o desempenho (através da função de aptidão verdadeira). Desta forma, os autores pretendiam determinar as soluções robustas de um problema de optimização com um só objectivo. A medida de robustez é

definida como a razão entre o desvio padrão da aptidão e a média do desvio padrão das variáveis de decisão. Para estimar a medida de robustez, são estimadas a aptidão média e o desvio padrão usando as soluções vizinhas da geração corrente, não sendo necessárias quaisquer avaliações adicionais da aptidão, mas apenas usando os indivíduos da geração corrente para estimar a variância local da aptidão. Isto torna-se possível porque a diversidade local da população é mantida usando o método dinâmico de agregação ponderada para optimização multi-objectivo (Jin et al. (2001-a)).

Li et al. (2005) apresentaram uma abordagem determinística para estudar o compromisso entre desempenho e robustez das soluções óptimas de Pareto de um problema multi-objectivo. A finalidade desta abordagem é optimizar, em simultâneo, duas funções objectivo: um valor de aptidão e um índice de robustez. O valor de aptidão serve como medida do desempenho das soluções óptimas de Pareto relativamente aos vários objectivos e da admissibilidade do problema original (considera os objectivos e as restrições do problema original). Estes valores de aptidão podem ser obtidos a partir de qualquer abordagem evolucionária multi-objectivo, como é o caso do NSGA (Srinivas e Deb (1994)). O índice de robustez é uma medida que avalia quantitativamente a robustez das soluções obtidas. O índice de robustez de uma solução é calculado com base na estimação da sensibilidade dos dados incertos e o raio da hiper-esfera exterior da região de tolerância normalizada (a região de tolerância é um hiper-rectângulo no espaço formado por um conjunto de valores das variações dos dados incertos, em relação aos quais o AD pretende que uma solução robusta seja insensível).

Lim et al. (2005) apresentaram uma abordagem de optimização evolucionária para pesquisar soluções com desempenhos (função de aptidão) nominais não dominados e robustas. Usando *a priori* a informação sobre a robustez desejada para a solução final do modelo, o algoritmo deve convergir para um conjunto de soluções que apresentem bons desempenhos nominais e que exibam robustez máxima. Um aspecto importante desta metodologia é que não requer a construção de qualquer estrutura da incerteza envolvida, sendo, por isso, particularmente útil quando é escassa a informação disponível sobre a incerteza. Os autores usaram o NSGA (Srinivas e Deb (1994)) para testar esta metodologia.

Deb e Gupta (2005) (ver também Deb e Gupta (2004)) apresentaram duas abordagens para determinar soluções robustas em problemas de optimização multi-objectivo. A primeira consiste em optimizar as funções objectivo efectivas médias, as quais são calculadas através da média de um conjunto representativo de soluções vizinhas. A segunda consiste em optimizar as funções objectivo originais, mas considerando uma restrição para limitar as alterações nos valores das funções objectivo a um valor definido pelo utilizador.

Gupta e Deb (2005) estenderam os conceitos apresentados por Deb e Gupta (2005) para determinar soluções robustas em problemas de optimização multi-objectivo com restrições efectivas. Os autores usaram o modelo desenvolvido por Deb e Gupta (2005) (em optimização multi-objectivo sem restrições), e mostraram que a inclusão de restrições resultou num maior deslocamento da fronteira robusta, uma vez que as soluções nos limites da região admissível (embora sejam as melhores) são geralmente não robustas. A estratégia de manipulação de restrições proposta foi incorporada nas duas abordagens descritas em Deb e Gupta (2005).

Como as abordagens apresentadas por Deb e Gupta (2004) e Deb e Gupta (2005) foram as primeiras a tratar os problemas como multi-objectivo tendo, assim, maior relevância no âmbito desta tese, vão ser alvo de uma análise mais detalhada na secção seguinte.

3. Abordagem de Deb e Gupta

Deb e Gupta (2004) e Deb e Gupta (2005) apresentaram duas abordagens diferentes de optimização robusta multi-objectivo, uma utilizando as funções objectivo efectivas médias e a outra utilizando as funções objectivo originais.

Na primeira abordagem, os autores estenderam uma abordagem já existente para determinar soluções robustas de um problema de optimização com um só objectivo à optimização multi-objectivo. No essencial, em vez de optimizar as funções objectivo originais, optimizam-se as funções efectivas médias, calculadas através da média de um conjunto representativo de soluções vizinhas. As soluções que são menos sensíveis a perturbações locais serão favorecidas em termos de valor da função efectiva média, o que leva a que a frente eficiente resultante seja constituída por soluções robustas.

A segunda abordagem consiste em optimizar as funções objectivo do problema original, mas adicionando uma (nova) restrição para limitar as dimensões das alterações dos valores das funções objectivo, causadas por perturbações locais, a um valor definido pelo utilizador. Desta forma, esta abordagem é mais pragmática do que a primeira, tendo o utilizador um controlo no nível de robustez desejado das soluções obtidas.

No entanto, estas definições de robustez apenas são utilizadas em problemas onde a incerteza se encontra nos valores das variáveis de decisão das soluções.

3.1. Robustez em otimização mono-objectivo

Considere-se o problema de otimização com um só objectivo, cuja formalização foi apresentada na secção 1 do capítulo 2, mas que pode ser simplificada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } x \in X \end{aligned} \quad (1)$$

em que X é o espaço de pesquisa admissível.

Na minimização de uma função objectivo $f(x)$, a solução x^* é chamada de *solução robusta do tipo I* se é o mínimo global da função efectiva média $f^{ef}(x)$ definida em relação a uma δ -vizinhança, da forma seguinte (Deb e Gupta (2004) e Deb e Gupta (2005)):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f^{ef}(x) = \frac{1}{|B_\delta(x)|} \int_{y \in B_\delta(x)} f(y) dy \\ &\text{sujeito a } x \in X \end{aligned} \quad (2)$$

em que $B_\delta(x)$ é a δ -vizinhança da solução x e $|B_\delta(x)|$ é o hiper-volume da vizinhança.

Para se analisar a vizinhança de uma solução, considera-se um conjunto finito de h soluções, as quais podem ser escolhidas aleatoriamente (ou de outra forma estruturada) dentro de uma δ -vizinhança de uma solução x , $B_\delta(x)$, no espaço das variáveis, e usar-se a função efectiva média, $f^{ef}(x)$, como função de aptidão de um algoritmo evolucionário. Desta forma, em vez de a um indivíduo estar associado um valor da própria função $f(x)$, está associado um valor do objectivo "aglomerado", o qual depende da sua vizinhança.

A outra abordagem consiste em calcular a diferença normalizada entre o valor da função perturbada, $f^p(x)$ e o valor da função original $f(x)$. Nesta abordagem, uma solução é considerada robusta se a diferença normalizada (relativa) for menor do que um certo limiar, η , previamente escolhido.

Na minimização de uma função objectivo $f(x)$, uma solução x^* é chamada de *solução robusta do tipo II* se é uma solução mínima global do seguinte problema (Deb e Gupta (2004) e Deb e Gupta (2005)):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } \frac{\|f^p(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \eta, \\ &x \in X \end{aligned} \quad (3)$$

O valor da função perturbada $f^p(x)$ pode ser escolhido, por exemplo, como o valor da função efectiva média $f^{ef}(x)$ ou como o pior valor da função na vizinhança (entre h soluções escolhidas aleatoriamente). Este método requer também o cálculo de h soluções vizinhas. O operador $\|\cdot\|$ pode ser qualquer medida adequada. Considera-se o limiar η constante e previamente definido pelo utilizador. Nalgumas aplicações, pode-se utilizar a diferença normalizada absoluta, $\|f^p(x) - f(x)\| \leq \eta$, em vez da relativa.

3.2. Robustez em otimização multi-objectivo

Considere-se o problema de otimização multi-objectivo, cuja formalização foi apresentada na secção 2.1 do capítulo 2, mas que pode ser simplificada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)) \\ &\text{sujeito a } x \in X \end{aligned} \quad (4)$$

em que se consideram M funções objectivo, geralmente em conflito e não comensuráveis.

Os dois conceitos de robustez apresentados na secção anterior, para o caso mono-objectivo, podem ser estendidos para o caso multi-objectivo. No entanto, para que uma solução óptima de Pareto seja classificada como robusta, tem agora que demonstrar a sua "imunidade" em todas as funções objectivo relativamente a pequenas perturbações nos valores das variáveis de decisão. Esta imunidade tem agora que ser estabelecida relativamente a todos os M objectivos (ou a um subconjunto que o AD considere mais relevantes) — isto é, tem que ser usado um efeito combinado das variações em todos os M objectivos como uma *medida* de imunidade face a perturbações de diferentes dimensões. Adicionalmente, existem muitas soluções a serem pesquisadas com vista à avaliação da sua robustez, em vez de uma solução óptima como no caso da optimização com um único objectivo (ou mais do que uma no caso de existirem soluções óptimas alternativas).

A partir da definição de solução robusta do tipo I, para o caso mono-objectivo, pode definir-se solução robusta multi-objectivo do tipo I.

Uma solução x^* é designada por *solução robusta multi-objectivo do tipo I* se é uma solução óptima de Pareto global para o seguinte problema multi-objectivo, definido relativamente a uma δ -vizinhança, $B_\delta(x)$, de uma solução x (Deb e Gupta (2004) e Deb e Gupta (2005)):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } (f_1^{\text{ef}}(x), f_2^{\text{ef}}(x), \dots, f_M^{\text{ef}}(x)) \\ &\text{sujeito a } x \in X \end{aligned} \quad (5)$$

em que

$$f_j^{\text{ef}} = \frac{1}{|B_\delta(x)|} \int_{y \in B_\delta(x)} f_j(y) dy, \text{ para } j = 1, \dots, M. \quad (6)$$

Devido aos diferentes níveis de imunidade relacionada com os vários objectivos, uma parte da frente eficiente global original pode não ser classificada como frente robusta. Nalgumas situações, a frente eficiente global original (correspondente ao problema (4)) pode ser totalmente não-robusta e uma frente local original ou uma frente sub-óptima original pode tornar-se robusta. Dependendo de quão robusta (do tipo I) é

uma frente eficiente global original, podem ocorrer os seguintes quatro casos principais (Deb e Gupta (2004) e Deb e Gupta (2005)):

- 1) toda a frente eficiente original é robusta;
- 2) uma parte da frente eficiente original é não robusta;
- 3) toda a frente eficiente original é não robusta, mas é robusta uma frente eficiente local;
- 4) uma parte da frente eficiente original é robusta, assim como uma parte de uma frente eficiente local.

A partir da definição de solução robusta de tipo II, para o caso mono-objectivo, pode também definir-se solução robusta multi-objectivo do tipo II.

Uma solução x^* é designada por *solução robusta multi-objectivo do tipo II* se é solução óptima de Pareto global do seguinte problema multi-objectivo (Deb e Gupta (2004) e Deb e Gupta (2005)):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)) \\ & \text{sujeito a } \frac{\|f^P(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \eta \\ & \quad x \in X \end{aligned} \tag{7}$$

Pode usar-se qualquer função para $f^P(x)$ e qualquer norma para o operador $\|\cdot\|$, desde que sejam adequadas ao problema; por exemplo, pode usar-se a função efectiva média $f^e(x)$ e a norma Euclidiana, respectivamente. Considera-se o limiar η constante e previamente definido pelo utilizador.

4. Uma nova abordagem à optimização robusta multi-objectivo

As definições apresentadas na secção anterior permitem classificar as soluções apenas como robustas ou não-robustas. No entanto, a "diferença" entre uma solução robusta e uma não-robusta pode ser muito pequena. Por outro lado, uma solução pode ser mais robusta do que outra e, no entanto, esta segunda ser considerada "mais interessante", para o AD, do que a primeira, face aos valores que apresenta para as funções objectivo.

Desta forma, é mais interessante, do ponto de vista operacional do apoio à decisão, utilizar as definições de robustez de forma a qualificar as soluções tendo em conta a respectiva vizinhança; por exemplo, definindo um grau de robustez que qualifique cada solução, cujo valor irá interferir directamente no cálculo do valor da função de aptidão de cada uma delas e, desta forma, contribuir para a evolução das soluções determinadas pelo processo evolucionário.

Estas novas definições de robustez podem ser usadas na construção de abordagens evolucionárias para problemas sujeitos a incerteza (perturbações), quer nos valores das variáveis de decisão, quer nos dados (coeficientes e parâmetros) associados às restrições e às funções objectivo do problema em estudo. O problema em estudo é modelado deterministicamente (através dos dados "nominais" associados ao problema), sendo as perturbações adicionadas às respectivas entidades do modelo no decorrer do processo evolucionário, aquando do cálculo dos graus de robustez das soluções.

Quando apenas os valores das variáveis de decisão estão sujeitos a perturbações, diz-se que estas incidem sobre o espaço das variáveis de decisão. Quando apenas os dados associados às restrições estão sujeitos a perturbações, diz-se que estas incidem sobre a região admissível. Quando apenas os dados associados às funções objectivo estão sujeitos a perturbações, diz-se que estas incidem sobre o espaço dos objectivos.

Para avaliar a robustez das soluções de um problema em que os dados associados às restrições e às funções objectivo estão sujeitas a perturbações, é necessário introduzir o conceito de cenário. Um *cenário* é um conjunto de valores possíveis para os dados do problema sujeitos a perturbações. Ao conjunto dos valores iniciais (nominais) para estes dados dá-se o nome de *cenário de referência*. Designa-se por *espaço dos cenários* o conjunto de todos os cenários possíveis.

4.1. Perturbações nos valores das variáveis de decisão

Assume-se que as perturbações sobre uma solução podem ocorrer em qualquer dimensão do espaço das soluções (x_1, x_2, \dots, x_n) . O cálculo do grau de robustez de uma solução x depende do comportamento das soluções que pertencem a uma vizinhança de raio δ em redor de x , no espaço das soluções e no espaço dos objectivos. Desta forma, o grau de robustez de uma solução x depende:

- a) do número de soluções admissíveis da δ -vizinhança de x ;
- b) do número de soluções da δ -vizinhança de x , cujos valores das funções objectivo são melhores do que os valores das funções objectivo para x , $f(x)$, ou pertencem a uma η -vizinhança em redor de $f(x)$.

A ideia subjacente é determinar um conjunto de k vizinhanças em redor da solução x , cujos raios são valores múltiplos de um valor δ ($k\delta$), tal que as soluções que pertencem a estas vizinhanças são admissíveis e as suas imagens são melhores do que $f(x)$ ou pertencem a uma vizinhança de raio η em redor de $f(x)$.

O processo começa por analisar h soluções pertencentes à δ -vizinhança de uma solução x , as quais são geradas aleatoriamente e se distribuem uniformemente em redor de x (ver também Deb e Gupta (2004)). Esta vizinhança é então progressivamente

alargada em múltiplos de δ ($\delta, 2\delta, \dots$), até que a percentagem das h soluções que são admissíveis seja inferior a um limiar predefinido, ou cujos valores das funções objectivo que são melhores do que $f(x)$ ou que pertencem à vizinhança de raio η em redor de $f(x)$ seja inferior a um outro limiar predefinido. Isto permite atribuir um grau de robustez às soluções de acordo com o número de vizinhanças de raios múltiplos de δ construídas em que a condição anterior é satisfeita.

Desta forma, o grau de robustez k de uma solução x é calculado gradualmente, com k a aumentar a amplitude das vizinhanças ($\delta, 2\delta, \dots, k\delta$) e o número de soluções vizinhas de x ($h, h+qh, \dots, h+(k-1)qh$), tal que na $t\delta$ -vizinhança de x são analisadas $h+(t-1)qh$ soluções vizinhas — $t \in \{1, \dots, k\}$ e $0 \leq q \leq 1$ (parâmetro descrito na próxima secção) — ver Figura 4.1.

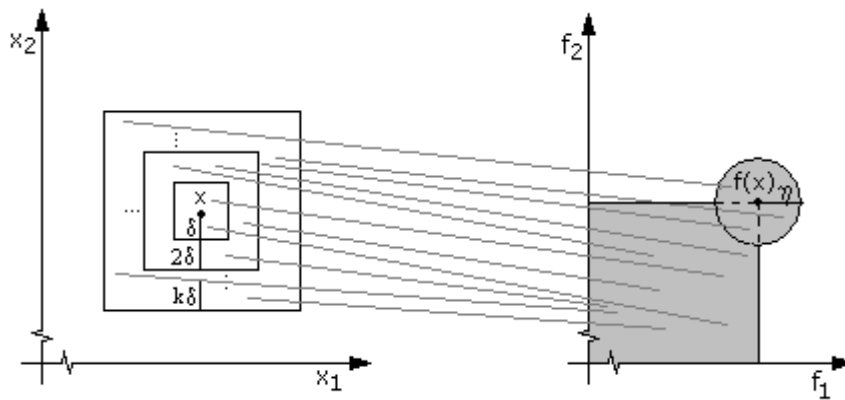


Figura 4.1: Definições das vizinhanças nos espaços das variáveis de decisão e das funções objectivo (para espaços bidimensionais e todas as funções a minimizar).

O grau de robustez uma solução x define-se como um valor inteiro positivo k , tal que (Figura 4.1):

- a) a percentagem de soluções admissíveis da $k\delta$ -vizinhança de x é maior ou igual a um limiar predefinido p_1 ;
- b) a percentagem de soluções da $k\delta$ -vizinhança de x , cujos valores das funções objectivo que são melhores do que $f(x)$ ou que pertencem à η -vizinhança de $f(x)$ é maior ou igual a um limiar predefinido p_2 ;
- c) a percentagem de soluções admissíveis da $(k+1)\delta$ -vizinhança de x é inferior a p_1 ; ou
- d) a percentagem de soluções da $(k+1)\delta$ -vizinhança de x , cujos valores das funções objectivo que são melhores do que $f(x)$ ou que pertencem à η -vizinhança de $f(x)$ é inferior a p_2 .

A δ -vizinhança de x pode ser traduzida por uma hiper-esfera de raio δ ou por um hipercubo de arestas 2δ centrados em x , assim como a η -vizinhança de $f(x)$ pode ser uma

hiper-esfera de raio η ou um hipercubo de arestas 2η centrados em $f(x)$ (ver Figura 4.1 para o caso bidimensional).

Para o caso , a δ -vizinhança de x é traduzida por um intervalo de amplitude 2δ centrado em x ($x \pm \delta$), assim como a η -vizinhança de $f(x)$ pode ser traduzida por um intervalo de amplitude 2η centrado em $f(x)$ ($f(x) \pm \eta$).

4.2. Perturbações nos dados associados às funções objectivo

Para este caso, é necessário utilizar o conceito de cenário, introduzido no início desta secção. Um cenário é um conjunto de possíveis valores para os dados associados às funções objectivo do modelo sujeitos a perturbações. O cálculo do grau de robustez de uma solução x envolve a análise do comportamento de x para os cenários pertencentes à vizinhança de raio δ em redor do cenário de referência s , numa vizinhança de raio η em redor dos valores das funções objectivo da solução x para o cenário de referência s , $f^s(x)$.

A ideia fundamental é determinar um conjunto de k vizinhanças em redor do cenário de referência s , cujos raios são múltiplos de δ ($k\delta$), tal que os valores das funções objectivo de x para estes cenários são melhores do que $f^s(x)$ ou pertencem a uma η -vizinhança predefinida em redor de $f^s(x)$.

O processo começa por analisar um conjunto de h cenários pertencentes a uma vizinhança de raio δ em redor do cenário de referência s , os quais são geradas aleatoriamente e se distribuem uniformemente em redor de s (ver também Deb e Gupta (2004)). Esta vizinhança é então progressivamente alargada em múltiplos de δ ($\delta, 2\delta, \dots$), até que a percentagem dos h cenários para os quais os valores das funções objectivo de x para estes cenários são melhores do que $f^s(x)$ ou pertencem a uma η -vizinhança de $f^s(x)$ seja inferior a um limiar predefinido. Isto permite atribuir um grau de robustez às soluções de acordo com o número de vizinhanças de raios múltiplos de δ construídas em que a condição anterior é satisfeita.

Desta forma, o grau de robustez k de uma solução x é calculado gradualmente, com k a aumentar a amplitude das vizinhanças ($\delta, 2\delta, \dots, k\delta$) e o número de cenários vizinhos do cenário de referência s ($h, h+qh, \dots, h+(k-1)qh$), tal que na t -vizinhança de s são analisados $h+(t-1)qh$ cenários vizinhos — $t \in \{1, \dots, k\}$ e $0 \leq q \leq 1$ (parâmetro descrito na próxima secção) — ver Figura 4.2.

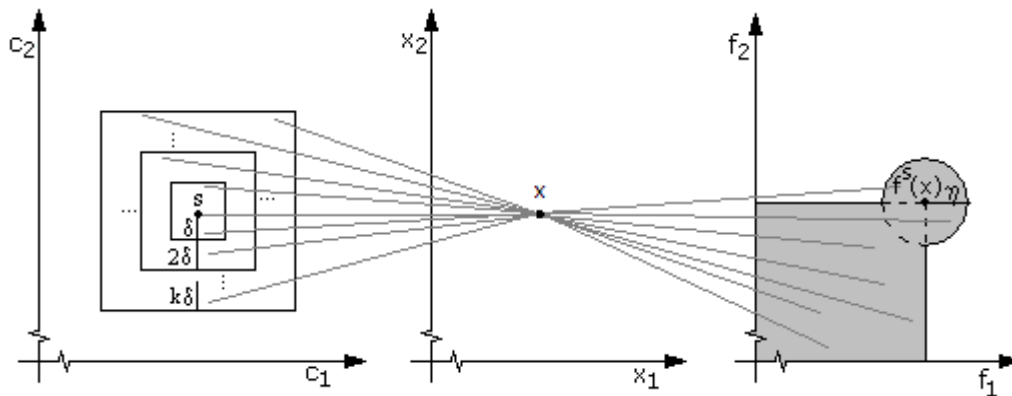


Figura 4.2: Definições das vizinhanças nos espaços dos cenários e das funções objectivo (para espaços bidimensionais e todas as funções a minimizar).

O grau de robustez de uma solução x define-se como um valor inteiro positivo k , tal que (Figura 4.2):

- a) a percentagem de cenários da $k\delta$ -vizinhança de s , cujos valores das funções objectivo de x para estes cenários que são melhores do que $f^s(x)$ ou que pertencem à η -vizinhança de $f^s(x)$ é maior ou igual a um limiar predefinido p_2 ;
- b) a percentagem de cenários da $(k+1)\delta$ -vizinhança de s , cujos valores das funções objectivo de x para aqueles cenários que são melhores do que $f^s(x)$ ou que pertencem à η -vizinhança de $f^s(x)$ é inferior a p_2 .

A δ -vizinhança de s pode ser traduzida por uma hiper-esfera de raio δ ou um hipercubo de arestas 2δ centrados em s , assim como a η -vizinhança de $f^s(x)$ pode ser uma hiper-esfera de raio η ou um hipercubo de arestas 2η centrados em $f^s(x)$ (ver Figura 4.2, para o caso bidimensional).

Para o caso , a δ -vizinhança de s é traduzida por um intervalo de amplitude 2δ centrado em s ($s \pm \delta$), assim como η -vizinhança de $f^s(x)$ pode ser traduzida por um intervalo de amplitude 2η centrado em $f^s(x)$ ($f^s(x) \pm \eta$).

4.3. Perturbações nos dados associados às restrições

Também para este caso é necessário utilizar o conceito de cenário, introduzido no início desta secção. Um cenário é um conjunto de possíveis valores para os dados associados às restrições do modelo (pode-se também incluir as $2n$ restrições associadas aos limites das variáveis de decisão) sujeitos a perturbações.

O cálculo do grau de robustez de uma solução x envolve a análise da vizinhança de raio δ em redor do cenário de referência s , em termos de admissibilidade de x para estes cenários. Note-se que $f(x)$ é a imagem de x para o cenário de referência s , assim como

para todos os cenários possíveis. Pelo contrário, a admissibilidade da solução x pode ser diferente para cenários diferentes, uma vez que cada cenário pode corresponder a uma região admissível diferente.

Pretende-se determinar um conjunto de k vizinhanças em redor do cenário de referência s , cujos raios são valores múltiplos de um valor δ ($k\delta$), tal que a solução x é admissível para estes cenários.

O processo começa por analisar h cenários pertencentes a uma vizinhança de raio δ em redor do cenário de referência s , os quais são geradas aleatoriamente e se distribuem uniformemente em redor de s (ver também Deb e Gupta (2004)). Esta vizinhança é então progressivamente alargada em múltiplos de δ ($\delta, 2\delta, \dots$), até que a percentagem de cenários para os quais a solução x é admissível seja inferior a um limiar predefinido. Isto permite atribuir um grau de robustez às soluções de acordo com o número de vizinhanças de raios múltiplos de δ construídas em que a condição anterior é satisfeita.

Desta forma, o grau de robustez k de uma solução x é calculado gradualmente, com k a aumentar a amplitude das vizinhanças ($\delta, 2\delta, \dots, k\delta$) e o número de cenários vizinhos do cenário de referência s ($h, h+qh, \dots, h+(k-1)qh$), tal que na t -vizinhança de s são analisados $h+(t-1)qh$ cenários vizinhos — $t \in \{1, \dots, k\}$ e $0 \leq q \leq 1$ (parâmetro descrito na próxima secção).

O grau de robustez de uma solução x define-se como um valor inteiro positivo k , tal que:

- a) a percentagem de cenários da $k\delta$ -vizinhança de s , para os quais a solução x é admissível, é maior ou igual a um limiar predefinido p_1 ;
- b) a percentagem de cenários da $(k+1)\delta$ -vizinhança de s , para os quais a solução x é admissível, é inferior a p_1 .

A δ -vizinhança de s pode ser traduzida por uma hiper-esfera de raio δ ou um hipercubo de arestas 2δ centrados em s , assim como a η -vizinhança de $f^s(x)$ pode ser uma hiper-esfera de raio η ou um hipercubo de arestas 2η centrados em $f^s(x)$.

Para o caso , a δ -vizinhança de s é traduzida por um intervalo de amplitude 2δ centrado em s ($s \pm \delta$), assim como a η -vizinhança de $f(x)$ pode ser traduzida por um intervalo de amplitude 2η centrado em $f(x)$ ($f(x) \pm \eta$).

4.4. Parâmetros de robustez

Existem vários parâmetros que estão associados à análise de robustez das soluções, cada um deles com uma função específica, os quais podem receber valores diferentes consoante a vontade do AD e a fiabilidade pretendida no cálculo da solução escolhida (em termos de robustez).

O parâmetro h está associado ao número de pontos que pertencem à vizinhança de uma solução ou cenário de referência que são gerados e analisados. Quanto maior for este valor, mais fiável é a análise efectuada (no entanto, maior é o tempo de execução do algoritmo).

O parâmetro δ está associado ao raio base das vizinhanças das soluções ou cenários de referência. O valor para o raio de cada vizinhança é um múltiplo de δ ($\delta, 2\delta, \dots$). Este valor é indicado pelo AD e deve reflectir as suas preferências quanto à dimensão base da vizinhança das soluções no espaço das soluções, ou dos cenários de referência no espaço dos cenários, que ele aceite como região alternativa a cada solução, ou cenário.

O parâmetro η pode ser entendido como um indicador da robustez requerida pelo AD, mas de natureza diferente dos parâmetros p_1 e p_2 (descritos a seguir). Este parâmetro é usado como limite superior para a distância entre duas soluções (de qualquer tipo) no espaço dos objectivos (em problemas em que a perturbação incide sobre os valores das variáveis de decisão) ou entre as imagens de uma solução x em dois cenários diferentes, em que um deles é o cenário de referência (em problemas em que os dados do modelo associados às funções objectivo estão sujeitos a perturbações).

Este parâmetro reflecte os limiares de indiferença relativamente aos valores de cada função objectivo. Com o aumento do valor de η , o que significa que o AD é mais tolerante relativamente às diferenças nos valores das funções objectivo, a tendência é que o número de soluções com graus de robustez mais elevados também aumente.

Os parâmetros p_1 e p_2 podem ser entendidos como os principais indicadores da robustez requerida.

Em problemas em que os valores das variáveis de decisão estão sujeitos a perturbações, se o grau de robustez de uma solução x é k , então $p_1 = 100\%$ e $p_2 = 100\%$ significa que em todas as $t\delta$ -vizinhanças ($t \in \{1, \dots, k\}$) de x , todos os h pontos vizinhos de x analisados são admissíveis e os respectivos valores das funções objectivo são melhores do que $f(x)$ ou pertencem à η -vizinhança de $f(x)$. Se $p_1 = 100\%$ e $p_2 = 90\%$, então todos os h pontos vizinhos de x são admissíveis e a percentagem destes h pontos para os quais os respectivos valores das funções objectivo são melhores do que $f(x)$ ou pertencem à η -vizinhança de $f(x)$ é pelo menos 90% . Se $p_1 = 90\%$ e $p_2 = 90\%$, então pelo menos 90% dos h pontos vizinhos de x são admissíveis e a percentagem destes h pontos para os quais os respectivos valores das funções objectivo são melhores do que $f(x)$ ou pertencem à η -vizinhança de $f(x)$ é pelo menos 90% .

Para problemas em que os dados associados às funções objectivo estão sujeitos a perturbações, se o grau de robustez de uma solução x é k , então $p_2 = 100\%$ significa que em todas as $t\delta$ -vizinhanças ($t \in \{1, \dots, k\}$) do cenário de referência s , os valores das funções objectivo de x para todos os h cenários vizinhos s' de s , $f^{s'}(x)$, são melhores do

que $f^s(x)$ ou pertencem à η -vizinhança predefinida de $f^s(x)$. Se $p_2 = 90\%$, então a percentagem dos h cenários vizinhos s' de s , para os quais os valores das funções objectivo de x , $f^{s'}(x)$, são melhores do que $f^s(x)$ ou pertencem à η -vizinhança de $f^s(x)$ é pelo menos 90%.

Para problemas em que os dados associados às restrições estão sujeitos a perturbações, se o grau de robustez de uma solução x é k , então $p_1 = 100\%$ significa que em todas as t -vizinhanças ($t \in \{1, \dots, k\}$) do cenário de referência s , a solução x é admissível para todos os h cenários vizinhos de s . Se $p_1 = 90\%$ então a solução x é admissível em pelo menos 90% dos h cenários vizinhos de s .

Desta forma, é mais provável que uma solução x com grau de robustez k obtido com $p_1 = 100\%$ e/ou $p_2 = 100\%$ tenha, de facto, este valor como grau de robustez do que quando obtido com valores inferiores para p_1 e/ou p_2 , pois isto significa um relaxamento dos valores destes parâmetros (menor exigência implica menor fiabilidade do grau de robustez obtido para a solução e, portanto, maior risco associado à sua classificação com um certo grau de robustez).

O valor do parâmetro q é um coeficiente ($0 \leq q \leq 1$) associado ao aumento do número de pontos vizinhos a serem analisados nos sucessivos alargamentos das vizinhanças de uma solução ou cenário de referência. Por exemplo, se $q = 0.5$ então o número de pontos vizinhos a serem analisados na k -ésima ($k > 1$) vizinhança é aumentado em $0.5 \times h$ em relação ao número de pontos vizinhos analisados na vizinhança anterior: δ (h pontos), 2δ ($h+0.5 \times h$ pontos), 3δ ($h+0.5 \times h+0.5 \times h$ pontos),

No entanto, devido ao considerável tempo de execução dos algoritmos evolucionários implementados no âmbito deste trabalho (a descrever na secção 4.6 deste capítulo), cada um dos parâmetros p_1 , p_2 , η e q pode ter valores diferentes, de acordo com o tipo de soluções em causa (se são soluções admissíveis não dominadas, admissíveis dominadas ou não admissíveis), de forma a que este tempo se reduza.

Relativamente aos valores dos parâmetros p_1 e p_2 , recomenda-se que estes sejam sempre muito elevados (100%) para soluções admissíveis dominadas e não admissíveis, para que o grau de robustez máximo obtido por uma solução de qualquer destes tipos seja baixo (o que implica mais baixos custos computacionais); para soluções admissíveis não dominadas, estes parâmetros assumem os valores que o AD achar mais adequados (tendo em conta que parâmetros mais/menos elevados corresponde a maior/menor exigência quanto à robustez). Da mesma forma, recomenda-se que as soluções admissíveis dominadas e não admissíveis tenham valores baixos para os parâmetros η e q ; para as soluções admissíveis não dominadas, os valores para estes parâmetros devem ser o que AD achar mais adequados. A razão fundamental é que as soluções admissíveis não dominadas são muito mais importantes do que as soluções admissíveis dominadas e

não admissíveis, sendo, por isso, necessária uma análise mais exaustiva e mais precisa para as soluções admissíveis não dominadas.

4.5. Métricas

Para se verificar se, para uma solução y pertencente à δ -vizinhança da solução x , y também pertence à η -vizinhança de x no espaço dos objectivos, é necessário calcular a distância entre as imagens das soluções x e y no espaço dos objectivos, $f(x)$ e $f(y)$.

Da mesma forma, para se verificar se, para um cenário s' pertencente à δ -vizinhança do cenário de referência s , $f^{s'}(x)$ pertence à η -vizinhança de $f^s(x)$, é necessário calcular a distância entre as imagens da solução x nos cenários s' e s , $f^{s'}(x)$ e $f^s(x)$, no espaço dos objectivos.

Para calcular a distância normalizada entre $f(x)$ e $f(y)$ pode usar-se a expressão $\|f(y)-f(x)\|/\|f(x)\|$ (relativa) ou $\|f(y)-f(x)\|$ (absoluta). Para calcular a distância normalizada entre $f^{s'}(x)$ e $f^s(x)$ pode usar-se a expressão $\|f^{s'}(x)-f^s(x)\|/\|f^s(x)\|$ (relativa) ou $\|f^{s'}(x)-f^s(x)\|$ (absoluta). Para ambos os casos, o operador $\|\cdot\|$ pode ser qualquer métrica adequada, tal como a Euclidiana (L_2) ou de Chebycheff (L_∞).

Pode também usar-se a distância não normalizada entre $f(x)$ e $f(y)$, ou entre $f^{s'}(x)$ e $f^s(x)$. Nestes casos, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_M)$, em que M é o número de funções objectivo do problema.

4.6. Abordagem evolucionária

4.6.1. Construção das vizinhanças

Foi implementado um algoritmo evolucionário, mais propriamente um AG, no qual foram incorporadas as definições de grau de robustez propostas neste capítulo, para determinar as soluções óptimas de Pareto robustas de um problema de optimização multi-objectivo.

Neste algoritmo, um dos aspectos fundamentais está na construção das vizinhanças de uma solução x (espaço das soluções) ou de um cenário s (espaço dos cenários). Para tal, é necessário considerar dois parâmetros:

- a dimensão da vizinhança (δ) considerada para as soluções (no espaço das variáveis de decisão) ou para os cenários (no espaço dos cenários);
- número de h pontos (soluções ou cenários) vizinhos usados no cálculo do grau de robustez de uma solução x .

Relativamente à dimensão da vizinhança de uma solução ou de um cenário, ela pode ter valores diferentes para cada uma das suas componentes: $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{nc})$, em que nc é o número de componentes dos dados sujeitos a perturbações. Isto significa que para $i \neq j$ pode acontecer que $\delta_i \neq \delta_j$. Estes valores são predefinidos e fornecidos pelo AD, pois é ele que conhece o problema e sabe que valores reflectem as suas preferências quanto às diferenças significativas nas várias dimensões.

Há várias formas de gerar as h soluções (ou cenários) vizinhas(os) de uma solução x (ou cenário s) (Branke (2000)). A estratégia mais simples consiste em criar aleatoriamente h soluções (ou cenários) na vizinhança da solução x (ou cenário s). No entanto, tal introduz aleatoriedade adicional ao analisar a vizinhança da mesma solução (ou cenário) mais do que uma vez. Desta forma, deve criar-se um padrão aleatório de soluções (ou cenários) em redor de uma solução x (ou cenário s) no início de uma simulação e usar o mesmo padrão para todas as soluções (ou cenários).

Para criar sistematicamente um padrão (Figura 4.3), divide-se o intervalo de variação da vizinhança de cada uma das nc componentes sujeitas a perturbações, $[-\delta_i, \delta_i]$ (com $i = 1, 2, \dots, nc$), em exactamente h grelhas iguais, dividindo assim a δ -vizinhança em h^{nc} pequenas hiper-caixas. Depois, escolhe-se, de forma aleatória, exactamente h hiper-caixas das h^{nc} possíveis para que, em cada dimensão, todas as h grelhas distintas estejam representadas.

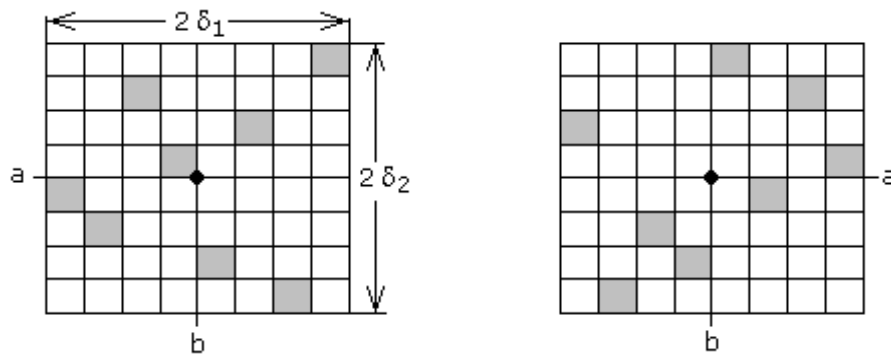


Figura 4.3: Forma de gerar $h=8$ pontos vizinhos em redor de uma solução $x=(a, b)$.

A Figura 4.3 apresenta dois padrões diferentes associados a uma mesma solução (ou cenário) de um problema em que duas componentes dos dados do problema estão sujeitos a perturbações ($nc = 2$). Depois de as hiper-caixas serem identificadas, é escolhida aleatoriamente uma solução (ou cenário) vizinha(o) em cada hiper-caixa, a qual é usada no cálculo do grau de robustez daquela solução. Este procedimento garante também que as h soluções (ou cenários) vizinhas(os) determinadas(os) estão todas(os) bem distribuídas(os) em redor de uma solução x (ou cenário s).

4.6.2. Algoritmo genético

Foi concebido e implementado um AG envolvendo o cálculo do grau de robustez associado a cada solução, o qual usa uma estratégia elitista com uma população secundária (apenas com soluções admissíveis não dominadas) de tamanho máximo constante. A estratégia elitista permite aumentar o desempenho do AG, quer acelerando a convergência para a frente não dominada, quer garantindo que as soluções encontradas são de facto não dominadas e estão bem distribuídas pela frente. Este é um aspecto importante em problemas reais (ver Gomes et al. (2004) e Costa (2003)), já que é necessário fornecer ao AD um conjunto de soluções não dominadas bem distribuídas e diversificadas, para que ele fique bem preparado para tomar uma decisão final.

De modo a influenciar o processo evolucionário na procura das soluções mais robustas, o conceito de grau de robustez apresentado é embebido na avaliação da função de aptidão de cada indivíduo (solução), juntamente com o teste de dominância. Em cada nível de não dominância, as soluções mais robustas são as que mais contribuem para a próxima geração.

Os passos principais do AG construído para testar a metodologia aqui proposta, são os seguintes:

- calcular o grau de robustez de cada indivíduo da população principal;
- calcular o valor da função de aptidão de cada indivíduo da população principal, usando o respectivo grau de robustez calculando antes;
- seleccionar por torneio POP-E indivíduos da população principal (POP é o tamanho da população principal e E é o número de indivíduos que compõem a elite);
- construir uma nova população formada por POP-E filhos gerados por cruzamento e mutação e pelos E indivíduos (elite) mais robustos da população secundária;
- avaliar os indivíduos da nova população, utilizando um teste de dominância e os respectivos graus de robustez, definindo, desta forma, uma aproximação à fronteira não dominada;
- determinar os indivíduos candidatos a pertencerem à população secundária (soluções não dominadas) e processá-los de forma a actualizar a população secundária usando uma técnica de manutenção da diversidade, se necessário (se o número de indivíduos candidatos for superior ao tamanho máximo da população secundária).

4.6.3. Função de aptidão

Dada uma população de soluções de qualquer tipo, o valor da função de aptidão de uma qualquer solução desta população depende, quer do teste de dominância aplicado às soluções da população, quer do grau de robustez da própria solução.

Para calcular o valor da função de aptidão de cada solução da população, utiliza-se uma técnica que consiste em determinar vários níveis de dominância, tal como no algoritmo "NSGA-II" (Deb (2001) e Deb et al. (2002)). Este método consiste em determinar 3 grupos de frentes não dominadas (ver secção 2.4.4 do capítulo 2):

- 1º grupo: todas as soluções admissíveis não dominadas (1 frente);
- 2º grupo: todas as soluções admissíveis dominadas;
- 3º grupo: todas as soluções não admissíveis.

Os principais passos do processo de cálculo do valor da função de aptidão das soluções (indivíduos) de uma população, são os seguintes:

- 1) Atribuir a cada solução da primeira frente, que é composta por todas as soluções não dominadas da população (1º grupo), um valor mínimo da função de aptidão igual a $POP \times (GrauMax + 1)$, em que $GrauMax$ é um valor predefinido que corresponde ao valor máximo que se pode atribuir para o grau de robustez de uma solução (por conveniência do algoritmo);
- 2) Para cada uma destas soluções, adicionar o seu grau de robustez ao seu valor da função de aptidão;
- 3) Ignorar temporariamente as soluções da primeira frente e aplicar às restantes soluções admissíveis (as soluções dominadas) um teste de dominância (as soluções consideradas não dominadas pertencerão à segunda frente de soluções);
- 4) Determinar o valor mínimo da função de aptidão para as soluções desta nova frente, subtraindo o valor " $GrauMax + 1$ " ao valor mínimo da frente anterior, e atribuí-lo a cada uma das soluções desta nova frente;
- 5) Para cada solução da frente actual, adicionar ao seu valor da função de aptidão o seu grau de robustez;
- 6) Este processo continua até todas as soluções admissíveis dominadas (2º grupo) terem associado um valor da função de aptidão;
- 7) Repetir o processo para todas as soluções não admissíveis (3º grupo), até todas elas terem associado um valor da função de aptidão.

Se duas soluções tiverem o mesmo valor da função de aptidão, então a melhor solução é aquela com menos soluções na sua vizinhança, de acordo com um raio predefinido. Para tal, define-se um nicho de raio df centrado em cada solução em causa, em que df é a distância máxima necessária entre soluções para obter uma frente bem distribuída. Por exemplo, em problemas bi-objectivo, o valor de df é igual a $MaxDist / POP$, em que $MaxDist$ é a distância entre os pontos ideais (obtidos considerando os melhores e os piores valores de cada função objectivo na população principal — ver secção 2.4.1 do capítulo 2) e POP é o tamanho da população que contém as soluções em questão.

Este processo garante que todas as soluções de um mesmo nível de dominância têm um valor da função de aptidão maior do que qualquer solução dos níveis seguintes. Desta forma, as soluções com maior valor da função de aptidão são as soluções admissíveis não dominadas (1º grupo) e as com pior valor são as soluções não admissíveis (3º grupo). Este processo garante também que, no mesmo nível de dominância, as soluções com maior grau de robustez têm maior valor da função de aptidão. Finalmente, num grupo de soluções do mesmo nível e com igual grau de robustez, as melhores são aquelas com menos vizinhos na população, de acordo com um raio predefinido d_f .

4.6.4. Mecanismo de manutenção da diversidade

Para actualizar a população secundária de forma a manter a diversidade na população secundária, é usado um mecanismo de partilha que utiliza um esquema de nichos, em que os valores dos raios são dinâmicos. Este mecanismo é aplicado após determinar todas as soluções não dominadas candidatas a pertencerem à população secundária. Estas são todas as soluções não dominadas do conjunto formado pela população secundária e pela população principal. Este mecanismo é apenas aplicado quando o número de soluções candidatas à população secundária (NCPS) é superior ao tamanho máximo da população secundária (NPS).

O mecanismo de partilha usado no AG elaborado consiste nos seguintes passos (adaptado a problemas bi-objectivo):

- 1) Inserir as soluções extremas (aquelas com os melhores valores para cada função objectivo);
- 2) Calcular o primeiro valor para o raio dos nichos, d_s , como o quociente entre a distância normalizada entre as soluções extremas e o tamanho máximo da população secundária (isto é, $d_s = \sqrt{2} / NPS$);
- 3) Do conjunto das soluções candidatas, inserir (transferir) aquelas que estão a uma distância superior a d_s das que já pertencem à nova população secundária, usando o grau de robustez como critério de prioridade;
- 4) Actualizar o valor do raio dos nichos, d_s , reduzindo-o em 10%;
- 5) Se a população secundária ainda não está completa, então regressar ao passo 3.

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos de um estudo efectuado ao desempenho do mecanismo apresentado de manutenção da diversidade numa população de soluções. Neste estudo foram realizadas 10 execuções de um AG caracterizado por uma população secundária de tamanho máximo igual a 50 ($NPS = 50$) e por executar 20.000 iterações (gerações). O campo "actualizados" indica o número de vezes que a população

secundária foi actualizada em cada uma das 10 execuções do AG (o máximo possível em cada execução é 20.000 actualizações), assim como os correspondentes valores mínimo, máximo e médio. O campo "colocados" indica o número de soluções que foram colocadas com o valor inicial do raio do nicho ($ds = \sqrt{2} / NPS$) em cada uma das 10 execuções do AG, assim como os correspondentes valores mínimo, máximo e médio. Os campos "melhor", "pior" e "média" indicam, para cada uma das 10 execuções, as percentagens mais elevada, mais baixa e média das soluções colocadas com o valor inicial do raio do nicho ($ds = \sqrt{2} / NPS$), assim como as percentagens mínima, máxima e média das 10 execuções.

	Actualizados	Colocados	Melhor (%)	Pior (%)	Média (%)
1	19.699	786.659	86	58	80
2	19.881	740.463	82	56	74
3	19.966	779.385	82	56	78
4	19.934	803.047	84	60	81
5	19.971	771.801	84	54	77
6	19.523	759.757	84	54	78
7	19.826	803.817	86	64	81
8	19.112	760.970	84	56	80
9	19.794	778.142	88	58	79
10	19.958	813.674	84	56	82
Min	19.112	740.463	82	54	74
Max	19.971	813.674	88	64	81
Média	19.767	779.772	85	58	** Expressão incorrecta **

Tabela 2: Resultados da aplicação do mecanismo de preservação da diversidade.

Os resultados obtidos com este mecanismo de partilha podem-se considerar bons, uma vez que são colocados com o valor inicial do raio do nicho, em média, 79% (registaram-se médias entre 74% e 81%) das NPS soluções da frente de Pareto (Tabela 2), o que indicia uma boa distribuição pela frente de Pareto logo com o valor inicial do raio do nicho. Por outro lado, a vantagem deste mecanismo, em relação aos geralmente usados (ver secção 5 do capítulo 2), está na simplicidade da sua implementação.

A Figura 4.4 mostra um exemplo da ordem de inserção das soluções numa frente de Pareto com 30 soluções, de acordo com a variação do valor do raio do nicho: para

$ds = \sqrt{2} / 30$ foram inseridas 23 soluções, isto é, 77% do total de soluções (a), reduzindo ds em 10% foi inserida mais 1 solução (b), reduzindo novamente ds em 10% foram inseridas mais 4 soluções (c) e, voltando a reduzir, pela última vez, ds em 10% foram inseridas mais 2 soluções (d).

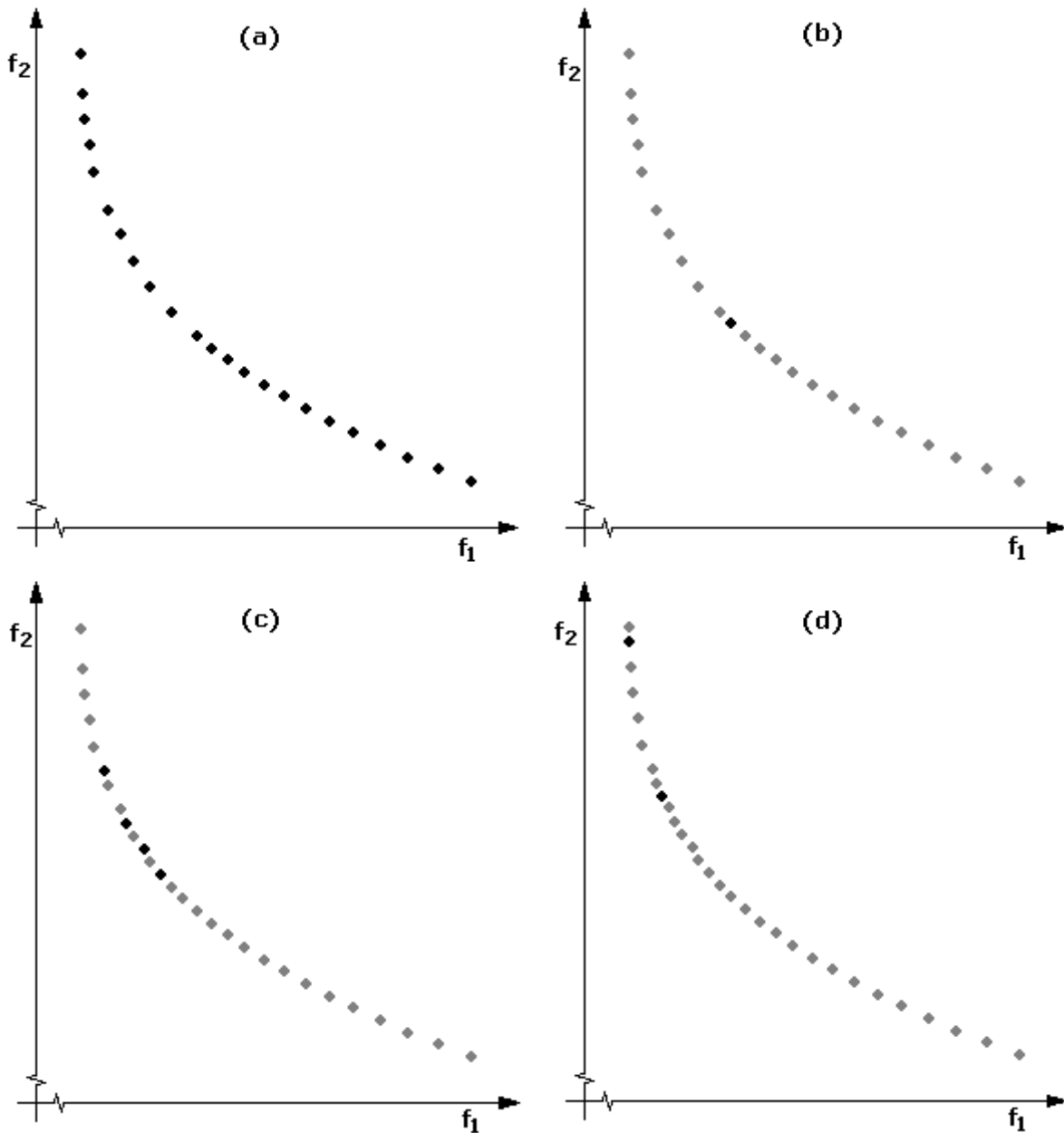


Figura 4.4: Mecanismo de preservação da diversidade populacional.

4.6.5. População inicial

A estratégia usada para determinar a população inicial consiste em gerar aleatoriamente apenas soluções admissíveis não dominadas. Este processo consiste nos seguintes passos:

- 1) Gerar uma solução admissível;
- 2) Se esta solução for não dominada relativamente à população inicial, então inseri-la nesta população e actualizar a população inicial (aplicando o teste de dominância);
- 3) Se a população inicial ainda não está completa, então regressar ao passo 1).

No entanto, em problemas com poucas soluções admissíveis não dominadas, a população inicial pode também conter soluções admissíveis dominadas. Para tal, usa-se um contador de soluções admissíveis geradas. Quando este contador atingir um número predefinido, se a população inicial ainda não estiver completa, então as próximas soluções admissíveis geradas são automaticamente inseridas na população inicial até esta ficar completa.

4.6.6. Descrição do algoritmo

O AG desenvolvido para testar a metodologia proposta consiste nos seguintes passos:

- 1) Iniciação: gerar aleatoriamente a população inicial com POP soluções admissíveis não dominadas (secção 4.6.5);
- 2) Determinar o grau de robustez de cada solução da população inicial;
- 3) Avaliação: calcular o valor da função de aptidão de cada solução da população inicial, usando o teste de dominância e o respectivo grau de robustez (secção 4.6.3);
- 4) Determinar a população secundária (inicial) de tamanho máximo NPS a partir da população inicial: se $NPS \geq POP$ então copiar todas as soluções da população inicial para a população secundária; caso contrário, aplicar o mecanismo de partilha às soluções da população inicial para seleccionar apenas NPS soluções (secção 4.6.4);
- 5) População actual \leftarrow População inicial;
- 6) Construir a população (principal) de tamanho POP, associada à nova geração:
 - a) Introduzir as E soluções mais robustas da população secundária (elite) na população principal;
 - b) Seleccionar por torneio 2 soluções da população actual (em cada torneio, são escolhidas aleatoriamente 10% das soluções da população actual, das quais é escolhida aquela com maior valor da função de aptidão);

- c) Aplicar os operadores genéticos, cruzamento e mutação, às 2 soluções antes seleccionadas, donde resultam 2 novas soluções;
 - d) Inserir estas 2 novas soluções na população principal;
 - e) Se a população principal ainda não contém POP soluções, então regressar ao passo b);
- 7) Determinar o grau de robustez de cada solução da população principal;
 - 8) Avaliação: calcular o valor da função de aptidão de cada solução da população principal, usando o teste de dominância e o respectivo grau de robustez (secção 4.6.3);
 - 9) Determinar as NCPS soluções candidatas a pertencerem à população secundária;
 - 10) Actualizar a população secundária: se $NPS \geq NCPS$ então copiar todas as NCPS soluções não dominadas candidatas à população secundária; caso contrário, aplicar o mecanismo de partilha às NCPS soluções não dominadas determinadas no passo 9) para seleccionar apenas NPS soluções (secção 4.6.4);
 - 11) População actual ← População principal;
 - 12) Se foi atingido o número de iterações predefinido, então STOP; caso contrário, regressar ao passo 6).