Capítulo 3

Análise de Robustez em Optimização

1. Caracterização da incerteza

1.1. Introdução

A tomada de decisões num contexto de incerteza é certamente uma das situações mais frequentes em problemas reais, nomeadamente no planeamento de actividades em diversos campos. A modelação da incerteza dos dados associados aos modelos matemáticos através de distribuições de probabilidade tem sido o principal meio para incorporar explicitamente informação que não é completamente conhecida na fase de construção dos modelos (ou porque não está disponível, ou é variável com o tempo ou outros factores, ou é contraditória entre diversas fontes, ou é controversa para diferentes intervenientes no processo). A incerteza pode ser proveniente de diversas fontes ou ser classificada em diferentes tipos, não sendo, em geral, adequado representar probabilisticamente todas as formas de incerteza associada a modelos matemáticos, nomeadamente se a informação disponível é para tal insuficiente (Agarwal et al. (2004)).

Tem-se assistido, nos últimos anos, a um crescimento do interesse do tratamento da incerteza em modelos matemáticos. O modelo matemático associado a um sistema real pode incluir vários tipos de incerteza, a qual pode ocorrer nos dados do modelo, na precisão do modelo usado para descrever o sistema, ou na sequência de possíveis acontecimentos que podem ocorrer num sistema de acontecimentos discretos (Oberkampf et al. (2004)).

A importância da construção de modelos que incorporem explicitamente a incerteza está no facto de a maioria dos problemas do mundo real não poderem ser modelados deterministicamente. Se isto acontecesse, bastaria "apenas" determinar a solução que optimiza um problema mono-objectivo ou escolher uma solução do conjunto de soluções não dominadas de um problema multi-objectivo, usando algoritmos específicos para tal. Como o que geralmente acontece é os dados associados aos problemas serem incertos, é necessário recorrer a modelos que incorporem a incerteza, uma vez que a qualidade das próprias soluções é também incerta. Algumas razões da necessidade deste tipo de modelos são as seguintes:

1) a natural incerteza das previsões relativas ao futuro;
2) a impossibilidade de medir os conceitos do mundo real com a precisão exigida pelo modelo matemático;
3) a impossibilidade de implementar uma solução com a precisão obtida através do modelo matemático;
4) a natural e constante alteração do mundo real onde a solução é implementada;
5) o facto das funções objectivo serem apenas traduções aproximadas dos objectivos do mundo real.

1.2. Tipos e causas da incerteza

A comunidade científica tem vindo, nos últimos anos, a diferenciar e caracterizar diferentes formas de incerteza.

Oberkampf et al. (2004) classificaram a incerteza em dois tipos: *aleatória* e *epistémica*. A *incerteza aleatória* é também designada por variabilidade, incerteza irredutível, incerteza inerente, ou incerteza estocástica. A *incerteza epistémica* é também designada por incerteza redutível, incerteza subjectiva, ou incerteza sobre a forma do modelo. Limbourg e Aponte (2005) também designaram a *incerteza aleatória* por *perturbação*[9] e a *epistémica* por *imprecisão*.

A *incerteza aleatória* descreve a variação inerente associada ao sistema físico ou ambiente em consideração (Oberkampf et al. (2004)), em que esta variação é causada, normalmente, pela natureza aleatória dos dados associados ao problema, podendo ser representada matematicamente por uma distribuição de probabilidade, desde que os dados experimentais disponíveis sejam suficientes (Agarwal et al. (2004)). A *incerteza aleatória* é o tipo de incerteza que tem sido alvo de mais estudos, sendo uma propriedade inerente à modelação de sistemas (ou inserida no modelo para simular este comportamento) e que não pode ser reduzida (Limbourg e Aponte (2005)).

[9] Tradução da palavra inglesa "noise".

A *incerteza epistémica* está associada a um certo nível de ignorância, ou informação incompleta, do sistema ou do ambiente que o rodeia. A *incerteza epistémica* é usada para descrever qualquer falta de conhecimento ou informação numa qualquer fase ou actividade do processo de modelação do sistema (Oberkampf et al. (2004)).

As causas da incerteza influenciam o tipo de informação associada ao modelo usado no tratamento da incerteza para traduzir o sistema físico em análise. São várias e distintas as causas da incerteza (Zimmermann (1998)): falta de informação, excesso de informação, provas em conflito, ambiguidade, medições e crença.

A *falta de informação* é provavelmente a causa mais frequente da incerteza. Existem situações em que um AD não tem qualquer informação acerca de qual dos possíveis estados naturais irá ocorrer. Noutras, o AD conhece apenas as probabilidades de ocorrência dos vários estados. Uma outra situação é aquela em que ninguém tem ou quer reunir informação suficiente para construir uma descrição exacta do acontecimento, embora isto possa ser possível.

O *excesso de informação* deve-se ao facto de ser limitada a capacidade do Ser Humano em perceber e processar, simultaneamente, grande quantidade de dados. Em muitas situações, são disponibilizados mais dados do que aqueles que podem ser processados; noutras, os fenómenos que lhe são transmitidos são definidos ou descritos com um grande número de características ou propriedades. Normalmente, estes dados são processados pelo analista que os transforma em dados perceptíveis, ou que centra a sua atenção apenas nos aspectos que lhe parecem ser os mais importantes (que podem não coincidir com os do AD) e negligenciando todos os outros dados ou informação.

Podem existir várias classes de informação (importante) disponível sobre um mesmo sistema, mas em que cada uma delas aponta para diferentes comportamentos do sistema (*provas em conflito*). Este conflito pode acontecer devido ao facto de parte da informação disponível ao analista estar errada (mas não identificável como tal pelo analista), das características da informação serem irrelevantes para o sistema, do modelo que o analista tem do sistema ser incorrecto, etc..

Se numa situação certas informações (por exemplo, linguísticas) têm significados totalmente diferentes ou têm uma correspondência de um para vários (matematicamente falando), então diz-se que existe *ambiguidade*. Todas as linguagens contêm palavras que, por diversas razões, têm diferentes significados em diferentes contextos.

O termo *medição* é aqui usado no sentido de "medição em engenharia", isto é, instrumentos para medição de aspectos físicos, tais como peso, temperatura, altura, etc.. No entanto, se uma dada propriedade exacta não puder ser medida com precisão, tem-se alguma incerteza relativamente à medição real, conhecendo-se apenas uma medida indicativa.

Em todas as classes de causas da incerteza já referidas, sempre se considerou que a informação disponível ao analista é objectiva. No entanto, é importante considerar uma outra classe para as situações em que a informação disponível ao analista é subjectiva; estas situações são classificadas segundo um tipo de *crença* numa certa circunstância. Estas situações são, talvez, as mais duvidosas de todas, pois também podiam ser classificadas como "falta de informação" no sentido objectivo.

A utilização de dados incertos em modelos de programação matemática tem sido reconhecida como um problema central na optimização, uma vez que na maioria das situações de apoio à decisão do mundo real, o AD/analista não tem possibilidades de especificar os valores exactos dos dados do modelo, devido ao facto de a informação conter um certo grau de incerteza. Assim sendo, é conveniente considerar a extensão dos modelos matemáticos de apoio à decisão para ambientes onde predomina a incerteza, sem assumir o carácter decisivo dos dados do modelo.

1.3. Modelos que incorporam a incerteza

Tratar a incerteza inclui construir modelos que incorporem a incerteza e, posteriormente, abordagens para determinar as soluções destes modelos.

Apesar de não existir um modelo único capaz de incorporar qualquer tipo de incerteza, o modelo escolhido tem de ser adequado, quer ao tipo de incerteza quer à quantidade e qualidade da informação disponível. Os modelos mais usados para tratar a incerteza, são os seguintes (Zimmermann (1998), Agarwal et al. (2004) e Matos (2007)): probabilístico, difuso, baseado em intervalos e baseado em cenários.

O *modelo probabilístico* é geralmente usado quando existe muita informação acerca do problema resultante de análises estatísticas ou proporcionais. A situação mais frequente é ter-se distribuições independentes dos dados incertos associados ao problema. Cada dado incerto tem vários valores possíveis, os quais são independentes dos valores dos restantes dados. Se a probabilidade de cada valor possível para um dado incerto for conhecida, então diz-se que este dado é caracterizado por uma distribuição de probabilidade. Cada dado pode ter um número finito ou infinito de valores possíveis, resultando numa distribuição de probabilidade discreta ou contínua, respectivamente.

O *modelo difuso* (isto é, aquele que modela o problema usando conjuntos difusos) é geralmente usado quando não existe informação estatística disponível ou quando se está a tratar de descrições qualitativas correspondentes a declarações de peritos acerca dos dados ou do impacto das alternativas. Enquanto que no modelo clássico de conjuntos, a relação entre um objecto e um conjunto é de pertença ou não pertença, no modelo difuso um objecto pode também pertencer parcialmente a um conjunto, existindo um grau de pertença nesta relação. A teoria de conjuntos difusos, desenvolvida por Zadeh (1965), é uma extensão à teoria clássica de conjuntos em que o grau de pertença para um elemento num conjunto toma um valor algures no intervalo [0,1], em vez de apenas 0 ou 1. Um conjunto difuso é uma classe de objectos em que não existe uma fronteira bem definida entre os objectos que pertencem à classe e os que não pertencem. Esta teoria foi desenvolvida no intuito de tornar tratável a complexidade subjacente a descrições de processos subjectivos ou mal entendidos.

O *modelo baseado em intervalos* considera que alguns ou todos os dados incertos do problema são descritos através de intervalos, em vez de um único valor numérico. Os intervalos são também usados para traduzir descrições qualitativas em valores numéricos. Na sua formulação básica, os intervalos não têm quaisquer ligações com as distribuições probabilísticas ou possibilísticas, sendo muito mais parecidos com os cenários (a descrever a seguir), pois apenas tentam capturar cada possível valor futuro dos dados relevantes. Os intervalos podem ser considerados como um caso particular de valores difusos, correspondendo a nenhuma informação adicional para além da gama de valores possível.

No *modelo baseado em cenários* os dados incertos são estimados globalmente, consideradas as suas correlações e construídos diferentes *futuros estruturados*. Apesar deste modelo não requerer uma distribuição de probabilidade, o conceito de "cenário mais provável" é muitas vezes invocado num sentido qualitativo, o que significa, geralmente, que todos os restantes cenários serão desprezados. Os cenários são possíveis (futuras) instâncias de dados do problema, sendo sempre necessário um modelo que forneça os meios para avaliar as consequências de uma decisão em cada cenário possível, para tornar esta abordagem útil. Atribuir probabilidades a cenários é uma prática usual, geralmente através de um conjunto de valores estimados por um perito.

2. Métodos associadas a modelos com incerteza

Existem, essencialmente, cinco classes de métodos em programação matemática que podem ser aplicados aos modelos que incorporam a incerteza (apresentados na secção anterior). Estas classes são as seguintes: análise de sensibilidade, programação difusa, programação intervalar, programação estocástica e programação robusta.

A *análise de sensibilidade* permite obter *a posteriori* as gamas de variação dos dados do problema, para as quais as soluções encontradas não sofrem alterações. Deste modo, avalia-se o efeito de variações previsíveis nos dados do problema sobre as soluções do modelo, não tendo em conta *a priori* a incerteza associada aos dados do problema. Por esta razão, alguns autores não consideram a *análise de sensibilidade* como uma abordagem para modelar a incerteza, pois a incerteza não é incorporada no processo de pesquisa de soluções.

Segundo Bellman e Zadeh (1970), a tomada de decisão num ambiente difuso é considerada como um processo de decisão em que os objectivos e/ou as restrições são de natureza difusa, o que significa que os objectivos e/ou as restrições constituem classes de alternativas cujas fronteiras não estão definidas com precisão. Os objectivos e as restrições podem assim ser definidas de um modo adequado na forma de conjuntos difusos, no espaço das alternativas.

A optimização difusa pretende determinar a solução "mais satisfatória" na presença de informação incompleta, subjectiva, imprecisa e/ou vaga. A primeira abordagem para modelos de decisão em ambientes difusos foi proposta por Bellman e Zadeh (1970), na qual não existe diferenciação entre os objectivos e as restrições, pretendendo-se tornar menos rígidas as noções de restrições e de optimização das funções objectivo.

Ao contrário das abordagens clássicas de optimização, as *abordagens difusas* não apresentam uma formulação única, pois permitem muitas variações semânticas, de acordo com as características do sistema real a modelar. Vários autores consideram duas classes de abordagens difusas distintas: programação flexível e programação robusta. Na programação difusa flexível, a estrutura dos modelos é fixa (todos os dados envolvidos são conhecidos) e as relações matemáticas envolvidas são difusas (objectivos e restrições difusas). Na programação difusa robusta, a estrutura dos modelos não é conhecida com exactidão, isto é, os dados dos modelos não podem ser fornecidos com precisão (Borges e Antunes (2002)). Para informações mais detalhadas sobre esta temática, ver também Borges (2005).

Na *programação intervalar* pressupõe-se que existe informação acerca das gamas de variação de alguns (ou de todos) dados do problema, os quais permitem especificar um modelo em que os dados são intervalos. As abordagens que têm sido propostas no âmbito da programação matemática intervalar estão essencialmente dirigidas para o tratamento da incerteza apenas nos dados associados às funções objectivo (a maioria), nos dados associados às funções objectivo e aos termos independentes das restrições, ou em todos os dados associados ao modelo.

Inuiguchi e Kume (1994) e Inuiguchi e Sakawa (1995) consideram duas abordagens diferentes para tratamento da incerteza apenas com funções objectivo intervalares: abordagem de satisfação e abordagem de optimização. Na abordagem de satisfação cada função objectivo intervalar é transformada numa ou em várias funções objectivo, de forma a obter uma solução de compromisso. A abordagem de optimização estende o conceito de eficiência usado em programação multi-objectivo, para o caso intervalar. Oliveira e Antunes (2007) contém informações mais detalhadas sobre esta temática.

A *programação estocástica* requer a existência de dados estatísticos suficientes para obter as funções de distribuição dos dados incertos do modelo ou o uso de probabilidades subjectivas, quando não existe aquele tipo de informação. Em meados dos anos 1950, Dantzig (1955) introduziu a programação estocástica como uma abordagem a modelos com incerteza nos seus dados, considerando cenários que ocorrem com diferentes probabilidades para descrever os dados do problema. As duas principais dificuldades de uma abordagem deste tipo são as seguintes:

a) não é fácil obter, na prática, a distribuição exacta para os dados, e assim, enumerar os cenários que recolhem esta distribuição;
b) o tamanho do modelo de optimização resultante aumenta drasticamente de acordo com o número de cenários, o que acarreta grandes desafios em termos computacionais.

No entanto, uma técnica normalmente usada para tratar este tipo de incerteza consiste em transformar o problema (não determinístico) num outro (determinístico), substituindo todos os parâmetros estocásticos do modelo pelos seus valores esperados (*problema do valor médio*). Desta forma, a solução "óptima" é aquela com o melhor valor esperado.

A *programação robusta* é baseada no conceito de *robustez* e nas noções relacionadas com robustez, cuja ideia base foi apresentada por Kouvelis e Yu (1997) e que corresponde ao paradigma *min-max* que pode ser enunciado da seguinte forma: *escolher a alternativa que, no pior caso, tem o melhor valor do atributo*. A formulação base da robustez ignora qualquer informação adicional, tal como distribuições de probabilidade. O conceito de robustez apesar de estar relacionado com o modelo baseado em cenários, não lhe está restrito, podendo ser usado com intervalos ou conjuntos difusos. A finalidade da *programação robusta* é determinar as soluções que estejam imunes a perturbações nos valores dos dados do modelo.

A programação robusta é uma das classes de abordagens de programação matemática que tem sido proposta com maior frequência nos últimos anos. A programação robusta tem sido usada numa grande variedade de modelos, sendo muitas vezes subdividida segundo as características mais específicas destes modelos, como é o caso dos modelos de optimização discreta robusta. Por esta razão, o estudo da *optimização discreta robusta* será também individualizado numa secção própria.

3. Conceitos de robustez

O conceito de robustez não é usado de forma uniforme por todos os investigadores. A diversidade de situações é tão grande que, provavelmente, seria necessário classificar os tipos de problemas de decisão e os tipos de incerteza, antes de propor diferentes tipos de robustez.

O primeiro conceito de robustez em problemas de decisão foi apresentado por Gupta e Rosenhead (1968). Desde então, várias interpretações de robustez têm sido introduzidas por diferentes autores.

Na literatura existem essencialmente quatro conceitos distintos, os quais podem ser pontos de partida para futuros desenvolvimentos (Vincke (2003)): *decisão robusta*, *solução robusta*, *conclusão robusta* e *método robusto*.

O conceito de *decisão robusta* num *contexto dinâmico* (Gupta e Rosenhead (1968), Rosenhead et al. (1972) e Rosenhead (1989)) pode também ser denominada de flexibilidade, uma vez que, num dado momento, a decisão é robusta se continuar, o mais possível, receptiva a planos "bons" no futuro.

O conceito de *solução robusta* em *problemas de optimização* (Rosenblatt e Lee (1987), em problemas de planeamento de instalações; Mulvey et al. (1995), em programação matemática; Kouvelis e Yu (1997), em problemas de optimização combinatória), onde robustez significa "boa em todos ou na maioria dos cenários" e em que um cenário é um conjunto de valores possíveis para os dados do modelo.

O conceito de *conclusão robusta* (Roy (1998) e Dias e Clímaco (1999)), onde robustez significa "válida em todos ou na maioria dos cenários" e em que um cenário é um conjunto de valores aceitáveis para os dados do modelo.

O conceito de *método robusto* (Vincke (1999-a), Vincke (1999-b) e Sörensen (2001)), onde robustez significa "que fornece resultados válidos em todos ou na maioria dos cenários" e onde um cenário é um conjunto de valores possíveis para os dados do modelo e para os parâmetros do método.

3.1. Decisão robusta

A noção de robustez aplicada a problemas de decisão foi inicialmente introduzida por Gupta e Rosenhead (1968) no contexto de problemas de planeamento sequencial. Neste tipo de problemas, as decisões são construídas ao longo do tempo perante diferentes fontes de incerteza. Desta forma, todas as decisões irão afectar os planos futuros, limitando o número de planos "bons" que poderão ser alcançados no futuro. A robustez de uma dada decisão baseia-se na flexibilidade que mantém. Uma decisão é considerada mais flexível quanto menos limitar o número de planos "bons" no futuro. O ideal era ser-se capaz de tomar decisões num dado instante sem limitar as diferentes possibilidades no futuro. Quanto mais flexível for uma solução, mais robusta será. Matematicamente, Rosenhead et al. (1972) definiram robustez da forma seguinte.

Seja d_i a decisão inicial escolhida de um conjunto de decisões D. Seja S o conjunto de todos os possíveis planos realizáveis no futuro. Seja S_i um subconjunto de S de planos alcançáveis após a decisão d_i ter sido escolhida. Sejam S^* e S_i^* o subconjunto de S e S_i de planos "bons" ou "aceitáveis", respectivamente. Então, a robustez da decisão d_i é medida em função do subconjunto de "bons" planos, isto é,

$$r_i = \frac{num(S_i^*)}{num(S^*)},$$

onde num(S) é o número de elementos do conjunto S. Quanto maior for o valor de r_i mais robusta é a decisão.

Como referido por Rosenhead et al. (1972), este critério dá mais ênfase ao planeamento contínuo de processos do que ao próprio plano final. A robustez está mais relacionada com as possíveis (diferentes) consequências de cada decisão considerada ao longo do planeamento do que com a própria decisão.

Nesta definição de robustez é considerada apenas a qualidade da solução (a ideia que uma solução robusta é aquela que se altera ligeiramente de um cenário para outro, não é aqui tido em conta).

3.2. Solução robusta

Mulvey et al. (1995) apresentaram uma formulação geral para um modelo de programação matemática mono-objectivo (a que chamaram de "optimização robusta"), baseada em cenários. Nesta formulação, uma solução de um modelo de optimização é definida como *solução robusta* se permanece "próxima" do óptimo em todos os cenários e como *modelo robusto* se continua "quase" admissível em todos os cenários.

Kouvelis e Yu (1997) apresentaram uma noção de robustez, mais conservadora, para problemas de optimização discreta, utilizando cenários. Mais conservadora significa que a noção assume que o AD corre o menor risco possível.

Nas abordagens apresentadas por Kouvelis e Yu (1997), as soluções robustas são aquelas cujos valores são os melhores no pior cenário, em que o pior cenário pode ser definido de várias formas. Em particular, estes investigadores definiram três medidas de robustez para definirem o pior cenário, uma baseada no critério *min-max absoluto* (robustez absoluta) e duas outras baseadas no critério *min-max regret* (desvio robusto e robustez relativa).

3.3. Conclusão robusta

Roy (1998) sugeriu a aplicação do conceito de robustez, não apenas a soluções mas, mais genericamente, a *conclusões* (asserções, recomendações).

Uma *conclusão* é uma informação deduzida a partir do modelo e dada ao AD durante o processo de decisão. Esta pode ser uma *proposição* para uma solução do problema, mas também pode ser uma *propriedade* ou um *facto* que pode ser útil ao AD. Uma *conclusão* diz-se *robusta* se é válida em todos (ou quase todos) os cenários, em que um cenário é um conjunto de valores possíveis para os dados do modelo usado para resolver o problema.

Uma *proposição* formal (por exemplo, 'o valor da função objectivo da solução *x* é pelo menos igual ao da solução *y*') é definida como sendo *perfeitamente robusta* se for válida em todos os cenários. Uma *proposição* formal é *aproximadamente robusta* se é válida em todos os cenários, excepto nalguns (não necessariamente identificados com clareza), que são considerados insignificantes. Se uma *proposição* é menos formal (por exemplo, 'a qualidade da solução *x* é boa'), mas é válida em todos os cenários, então diz-se que ela é *pseudo-robusta*.

Dias e Clímaco (1999) refinaram as definições anteriores, apresentadas por Roy (1998), e propuseram a seguinte classificação.

Uma *conclusão robusta absoluta* é uma premissa intrínseca a uma das acções (soluções), que é válida em qualquer cenário. Por exemplo, 'o valor da acção *x* é maior do que 0.7'.

Uma *conclusão (relativa) binária robusta* é uma premissa associada a um par de acções, a qual é válida em qualquer cenário. Por exemplo, '*x* domina *y*' ou '*x* é superior a *y* com uma credibilidade maior do que 0.7' são possíveis conclusões binárias robustas.

Uma *conclusão (relativa) unária robusta* é uma premissa associada a uma acção mas em relação às outras, que é válida em todos os cenários. Por exemplo, '*x* é não-dominada' ou 'a acção *x* está entre as três melhores acções'.

3.4. Método robusto

Vincke (1999-a) propôs uma definição formal de robustez, utilizando os conceitos de procedimento, método e tratamento. Um *procedimento* é uma aplicação que associa uma solução a cada instância de um problema. Um *método* é uma sequência de procedimentos que permite obter diferentes soluções para diferentes execuções (por exemplo, estabelecendo diferentes níveis de preferências). Um *tratamento* corresponde a uma aplicação específica de um método sobre um cenário específico (conjunto de dados do modelo e de parâmetros do método). Uma *solução x* é *robusta*, relativamente a um conjunto de tratamentos, se para todo o tratamento daquele conjunto a solução y obtida é semelhante a x em termos dos valores das funções objectivo. Um *método* é *robusto* para uma instância do problema, se para cada par de procedimentos deste método, as soluções obtidas são semelhantes entre si. Um *método* é *robusto para um problema* se é robusto para qualquer instância daquele problema.

A robustez de uma solução ou de um método é relativa, uma vez que depende da descrição do modelo ou do método. Isto porque a robustez não é uma qualidade intrínseca de uma solução (ou de um método), mas depende muito do contexto. O que é importante é uma certa coerência na formalização do modelo de decisão e na aplicação do método. Para a definição desta coerência pode ser útil a noção de robustez, mesmo que não seja suficiente. Desta forma, a robustez não é a única propriedade que permite caracterizar ou escolher um método, embora possa ser um meta-critério possível para avaliar os diferentes métodos.

Sörensen (2001) introduziu uma outra definição de robustez, mas relacionada com o comportamento de uma solução perante as possíveis perturbações nos dados do modelo. Se uma solução for muito sensível a pequenas perturbações naqueles dados, então esta não deve ser uma boa solução. A robustez está, assim, relacionada com a sensibilidade de uma solução em relação às perturbações que podem ocorrer nos dados do modelo. Este autor distinguiu dois tipos de robustez: *robustez de qualidade* e *robustez de solução*.

A *robustez de qualidade* de uma *solução* está relacionada com o facto da sua qualidade como solução continuar elevada, mesmo quando ocorrem alterações nos dados do modelo. Este tipo de robustez é especialmente importante em modelos em que é intratável uma frequente reoptimização do modelo, como, por exemplo, em modelos de localização de instalações (fábricas, armazéns, etc.). A *robustez de qualidade* pode ser descrita como robustez no espaço dos objectivos (Sevaux e Sörensen (2004)).

Nalguns modelos, quando ocorrem alterações nos seus dados, poderá ter que ser encontrada uma nova solução, uma vez que a solução original pode não satisfazer as restrições do novo modelo e, desta forma, o modelo terá que ser reoptimizado. Nestes casos, pode-se exigir que a nova solução seja o mais possível semelhante à original. Esta semelhança terá que ser medida no espaço das soluções e não no espaço dos objectivos. Desta forma, a *robustez de solução* pode ser descrita como robustez no espaço das soluções (Sevaux e Sörensen (2004)). Uma solução é robusta no espaço das soluções se a nova solução sofrer apenas uma ligeira modificação, quando comparada com a solução original, com as alterações nos dados do modelo.

Contrariamente à *robustez no espaço dos objectivos*, a *robustez no espaço das soluções* não é apenas uma característica da solução, mas também do método utilizado para a determinar. No entanto, a principal diferença entre estes dois tipos de robustez é que, enquanto na primeira é a qualidade da solução que tem que se manter, na segunda é a própria solução que não pode ser alterada (Sörensen (2001)).

4. Optimização robusta

A optimização robusta estuda metodologias de modelação que, combinadas com ferramentas computacionais, processa problemas de optimização com dados incertos e em que apenas se conhece se pertencem a um determinado conjunto de incerteza.

Soyster (1973) propôs um modelo de optimização linear para construir uma solução que fosse admissível para todos os dados do problema, tal que cada um dos dados do problema incerto pudesse tomar qualquer valor de um intervalo. No entanto, esta abordagem tende a determinar soluções demasiado conservadoras.

Mulvey et al. (1995) apresentaram uma abordagem, a que chamaram de *"optimização robusta"*, a qual integra formulações de *programação por metas* em que a descrição dos dados do problema é baseada em cenários. Esta abordagem é analisada detalhadamente na próxima secção deste capítulo (secção 4.1), por ser considerada por muitos autores um marco importante da optimização robusta.

El-Ghaoui e Lebret (1997) e El-Ghaoui et al. (1998) introduziram um maior conservadorismo nas soluções robustas, considerando conjuntos de incerteza dos dados do problema como elipsóides, e propuseram algoritmos eficientes para resolver problemas de optimização convexa com dados incertos. Os autores trataram da reformulação robusta do modelo de optimização, adaptando técnicas de controlo robusto partindo da suposição de que os dados da matriz dos coeficientes podem variar no interior do elipsóide associado ao conjunto da incerteza. Em alguns problemas importantes, os modelos robustos são exacta ou aproximadamente tratáveis, sendo eficientemente resolvidos através de métodos de ponto interior.

Também Ben-Tal e Nemirovski (1998), Ben-Tal e Nemirovski (1999) e Ben-Tal e Nemirovski (2000) introduziram um maior conservadorismo nas soluções robustas, considerando os mesmos tipos de conjuntos e de algoritmos que os autores anteriores. No entanto, como as formulações robustas resultantes conduzem a problemas quadráticos cónicos (ver Ben-Tal e Nemirovski (1999)), tais métodos não podem ser aplicados directamente a problemas discretos.

Ben-Tal e Nemirovski (2002) passam em revista os principais resultados obtidos pela "Optimização Robusta" quando aplicada à programação linear incerta, cónica quadrática e semi-definida.

Bertsimas e Sim (2003) e Bertsimas e Sim (2004) propuseram uma abordagem diferente para controlar o nível de conservadorismo de uma solução, a qual tem a vantagem de conduzir a um modelo de optimização linear, e assim, poder ser aplicado directamente em modelos de optimização discreta.

4.1. Abordagem de Mulvey, Verderbel e Zenios

Mulvey et al. (1995) introduziram uma abordagem pro-activa que modela a incerteza associada aos dados de um problema de programação matemática mono-objectivo usando cenários, produzindo soluções menos instáveis, relativamente aos dados do modelo, do que as formulações clássicas de programação matemática. Nesta abordagem, os dados do problema são representados por um conjunto de cenários, em que a probabilidade de cada um deles é supostamente conhecida. Desta forma, a noção tradicional de "solução óptima" deixa de fazer sentido, uma vez que é raro que uma solução seja óptima em todos os cenários possíveis do problema. Esta abordagem consiste em gerar uma cadeia de soluções que vão sendo progressivamente menos instáveis relativamente aos dados do modelo de um conjunto de cenários. O facto de algumas soluções poderem violar as restrições do problema original nalguns cenários é explicitamente reconhecido, sendo introduzidas funções de penalização para penalizar as soluções que violam as restrições.

Os autores apresentaram dois conceitos diferentes de robustez: *solução robusta* e *modelo robusto*. A solução óptima de um problema de programação matemática é robusta, relativamente à optimalidade, se permanecer "próxima" do óptimo em qualquer cenário (*solução robusta*). A solução óptima de um problema de programação matemática é robusta, relativamente à admissibilidade, se permanecer "quase" admissível em qualquer cenário (*modelo robusto*). As noções de "próxima" e "quase" são definidas com exactidão através da escolha de normas, as quais estão relacionadas com o risco que o AD pretende correr.

O modelo apresentado tem duas componentes distintas: a *estrutural* (que é fixa e livre de qualquer perturbação nos dados do problema) e a *de controlo* (que está sujeita aos dados do problema que são perturbados). Para se definir o modelo apropriado, é necessário introduzir dois conjuntos de variáveis:

- $x \in \mathbb{R}^{n1}$ é o vector das *variáveis de decisão* cujo valor óptimo não está dependente de alterações dos dados incertos (as variáveis de *projecto*). Estas variáveis não podem ser ajustadas, uma vez que estão perante um cenário único e inalterado.
- $y \in \mathbb{R}^{n2}$ é o vector das *variáveis de decisão* que estão sujeitas a ajustamentos, uma vez que existem dados incertos (variáveis *de controlo*). Os seus valores óptimos não

dependem apenas da existência de dados incertos, mas também dos valores óptimos das variáveis do projecto.

em que n1 + n2 = n (n é o número total de variáveis de decisão do problema).

Num contexto de planeamento da produção, as variáveis do projecto determinam a estrutura do processo e o tamanho dos módulos de produção. As variáveis de controlo são usadas para ajustar o modo e o nível de produção em resposta à rotura do processo, às alterações na procura ou na quantidade produzida, etc.. O modelo de optimização tem a seguinte estrutura:

Minimizar $c^T x + d^T y, \quad x \in \mathbb{R}^{n1}, \ y \in \mathbb{R}^{n2}$ (1)

sujeito a

$A\,x = b,$ (2)

$B\,x + C\,y = e,$ (3)

$x, y \geq 0,$ (4)

A equação (2) indica as restrições estruturais cujos coeficientes são fixos e livres de perturbações. A equação (3) indica as restrições de controlo, cujos coeficientes estão sujeitos a perturbações.

Para definirem o problema de optimização robusta, os autores introduziram um conjunto de cenários $\Omega = \{1, 2, ..., S\}$, em que cada cenário $s \in \Omega$ tem associado o conjunto $\{d_s, B_s, C_s, e_s\}$ de realizações de valores das variáveis de controlo (d_s) e de coeficientes das restrições de controlo (B_s, C_s, e_s), e a probabilidade do cenário p_s (com $\sum_{s\in\Omega} p_s = 1$). A solução óptima do programa matemático (1)-(4) será robusta, relativamente à optimalidade, se permanecer "próxima" do óptimo para qualquer cenário $s \in \Omega$ (*solução robusta*). A solução é também robusta relativamente à admissibilidade, se permanecer "quase" admissível para qualquer cenário $s \in \Omega$ (*modelo robusto*).

É pouco provável que alguma solução do modelo (1)–(4) permaneça admissível e óptima em todos os cenários $s \in \Omega$. Se o sistema que está a ser modelado tem embutido redundâncias substanciais, então pode ser possível encontrar soluções que permaneçam quer admissíveis quer óptimas. Caso contrário, é necessário um modelo que permita que seja medido o compromisso entre a robustez da solução e do modelo. O modelo de optimização robusto formaliza uma forma de medir este compromisso.

O modelo de optimização robusta tem a seguinte estrutura:

Minimizar $\sigma(x, y_1, y_2, ..., y_s) + \omega\,\rho(z_1, z_2, ..., z_s)$

sujeito a

$A\,x = b,$

$B_s\,x + C_s\,y + z_s = e_s, \qquad \forall\, s \in \Omega$

$x, y_s \geq 0, \qquad \forall\, s \in \Omega$

em que { $y_1, y_2, ..., y_S$ } é um conjunto de variáveis de controlo para cada cenário $s \in \Omega$ e { $z_1, z_2, ..., z_S$ } é um conjunto de vectores de erro que medirão a não admissibilidade permitida pelas restrições de controlo no cenário *s*.

No caso de múltiplos cenários, a função objectivo $\xi = c^T x + d^T y$ transforma-se numa variável aleatória que assume o valor $\xi_s = c^T x + d_s^T y_s$, com probabilidade p_s. Desta forma, como função global pode-se utilizar, por exemplo, o valor esperado $\left(\sigma(.)=\sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s\right)$, que é a função usada na programação linear estocástica, ou o valor no pior caso $\left(\sigma(.) = \max_{s\in S} \xi_s\right)$.

O segundo termo da função objectivo $\rho(z_1, z_2, ..., z_S)$ é uma função de penalização da admissibilidade, que é usada para penalizar as violações das restrições de controlo em alguns dos cenários.

Este modelo tem uma forma de objectivos múltiplos: o primeiro termo mede a robustez da optimalidade e o termo de penalização é uma medida da robustez do modelo. O peso da programação por metas ω é usado para obter um espectro de respostas às soluções de compromisso da robustez do modelo.

A introdução da função de penalização deve-se ao facto de o modelo reconhecer que nem sempre é possível obter uma solução que seja admissível em todos os cenários. A escolha específica de uma função de penalização é dependente do problema, e tem também implicações na implementação do algoritmo usado na obtenção da solução. Por exemplo, os autores consideraram duas funções de penalização alternativas:

- $\rho(z_1, z_2, \dots, z_s) = \sum_{s\in\Omega} p_s z_s^T z_s$ é uma função de penalização quadrática que se aplica a problemas com restrições de igualdade, onde não são desejáveis violações das restrições de controlo, quer sejam positivas ou negativas.
- $\rho(z_1, z_2, \dots, z_s) = \sum_{s\in\Omega} p_s \max\{0, z_s\}$ é uma função de penalização exacta que se aplica a restrições de controlo do tipo desigualdade, quando apenas têm interesse as violações positivas (valores negativos de z indicam inactividade das restrições de desigualdade).

4.2. Optimização discreta (combinatória) robusta

Um dos ramos mais interessantes da optimização discreta que tem emergido nos últimos anos é a optimização robusta. A optimização discreta robusta utiliza abordagens baseadas em cenários, mas em que a probabilidade de cada cenário se realizar não é conhecida nem especificada.

Na aplicação da abordagem robusta, devem ser considerados três elementos críticos inseridos num esquema sistemático de apoio à decisão, que são os seguintes (Kouvelis e Yu (1997)):

- utilização de uma Abordagem por Planeamento de Cenários para estruturar os dados incertos numa situação de decisão,
- escolha do(s) Critério(s) de Robustez apropriado(s) para a situação de decisão,
- desenvolvimento formal de um Modelo de Decisão.

Ou seja, para operacionalizar o apoio à decisão, uma abordagem robusta começa por identificar potenciais cenários para o modelo de decisão adequado à situação, sem contudo atribuir probabilidades aos vários cenários, para de seguida se ocupar em determinar a melhor decisão que está associada precisamente ao pior cenário identificado (Kouvelis e Yu (1997)).

Para se construir o pior cenário, Kouvelis e Yu (1997) definiram três medidas (critérios) diferentes de robustez, cuja escolha depende do risco que o AD pretende correr: robustez absoluta, desvio robusto e robustez relativa. Depois de criados os cenários e escolhido um critério de robustez, o problema é então formulado como um modelo de optimização que gere decisões robustas.

Desta forma, é importante identificar classes de modelos, para os quais pequenas alterações nos dados do problema levam a pequenas alterações nos resultados no pior cenário possível.

Nas definições apresentadas nesta secção, considera-se sempre que o problema em análise é de minimização.

Seja S o conjunto de todos os cenários possíveis, X o conjunto de todas as soluções admissíveis do problema e D o conjunto de todos os dados do problema. Seja X_s o conjunto de todas as soluções admissíveis para o cenário *s*. Suponhamos que a qualidade da solução $x \in X_s$ é calculada usando a função f(*x*, *s*) — note-se a dependência da função f(*x*) da solução *x* e do cenário *s*. A *solução óptima no cenário s* $\in$ S, x_s^*, é tal que (Kouvelis e Yu (1997))

$$f(x_s^*, s) = \min_{x \in X_s} f(x, s).$$

Robustez baseada num critério *min-max simples*

As soluções robustas absolutas são de natureza conservadora, uma vez que admitem à partida que o pior cenário possível vai acontecer.

A *solução robusta absoluta*, x^a, é a solução que minimiza o custo total máximo, entre todas as soluções admissíveis de todos os cenários realizáveis, isto é

$$z^a = \max_{s \in S} f(x^a, s) = \min_{x \in \bigcap_{s \in S} X_s} \max_{s \in S} f(x, s).$$

Dada uma solução $x \in X$, o *pior cenário absoluto para x*, s_x^a, é o cenário no qual o custo da solução x é máximo, isto é (Hites (2002))

$$s_x^a = \arg \max_{s \in S} f(x, s).$$

Com base na definição anterior, Hites (2002) definiu a *solução robusta absoluta* como a solução com o menor custo no pior cenário absoluto.

Robustez baseada num critério *min-max regret*

Kouvelis e Yu (1997) utilizaram duas variantes do conceito de *min-max regret* para definirem o pior cenário. Estas noções são menos conservadoras do que a anterior, uma vez que tendem a olhar para a incerteza mais como uma oportunidade a explorar do que como um risco a correr.

A *solução desvio robusta*, x^d, é a solução que minimiza o desvio máximo da optimalidade, entre todas as soluções admissíveis de todos os cenários realizáveis x_s^*, isto é (Kouvelis e Yu (1997))

$$z^d = \max_{s \in S} \left(f(x^d, s) - f(x_s^*, s) \right) = \min_{x \in \bigcap_{s \in S} X_s} \max_{s \in S} \left(f(x, s) - f(x_s^*, s) \right).$$

Dada uma solução $x \in X$, o *pior cenário desvio para x*, s_x^d, é o cenário no qual é máxima a diferença entre o custo da solução x e o custo da solução óptima neste cenário, isto é (Hites (2002))

$$s_x^d = \arg \max_{s \in S} (f(x, s) - f(x_s^*, s)).$$

Denomina-se por *pior desvio para a solução x* a diferença (Hites (2002))

$$d_x = f(x, s_x^d) - f\left(x^*_{s_x^d}, s_x^d\right).$$

Com base na definição anterior, Hites (2002) definiu a *solução desvio robusta* como a solução que se desvia menos da solução óptima no seu pior cenário desvio.

A *solução robusta relativa*, x^r, é a que, em termos percentuais, minimiza o desvio máximo da optimalidade entre todas as soluções admissíveis de todos os cenários realizáveis, isto é (Kouvelis e Yu (1997))

$$z^r = \max_{s \in S} \left(\frac{f(x^r, s) - f(x_s^*, s)}{f(x_s^*, s)} \right) = \min_{x \in \bigcap_{s \in S} X_s} \max_{s \in S} \left(\frac{f(x, s) - f(x_s^*, s)}{f(x_s^*, s)} \right).$$

Dada uma solução $x \in X$, o *pior cenário relativo para x*, s_x^r, é o cenário no qual é máxima a relação entre o desvio da solução x para a solução óptima e o custo da solução óptima, neste cenário; isto é

$$s_x^r = \arg \max_{s \in S} \left(\frac{f(x, s) - f(x_s^*, s)}{f(x_s^*, s)} \right).$$

Denomina-se por *pior desvio relativo para a solução x*, a relação

$$r_x = \frac{f(x, s_x^r) - f\left(x_{s_x^r}^*, s_x^r\right)}{f\left(x_{s_x^r}^*, s_x^r\right)}.$$

Com base na definição anterior, pode-se definir a *solução robusta relativa* como a solução que se desvia menos, em termos percentuais, da solução óptima no seu pior cenário relativo.

A justificação de Kouvelis e Yu (1997) para estas medidas é que, perante a incerteza, é necessário considerar todos as situações possíveis, incluindo as piores, uma vez que não se conhece qual delas pode vir a acontecer.

Kouvelis e Yu (1997) demonstraram que para certos problemas com dados intervalares, como é o caso de problemas em redes, o pior cenário desvio, para uma dada solução x, é o cenário em que o custo de todos os elementos de x correspondem aos seus limites inferiores e o custo de todos os outros elementos correspondem aos seus limites superiores. Por construção, este é um dos cenários em que a solução x se desvia mais da solução óptima no mesmo cenário.

5. Optimização robusta usando meta-heurísticas

A importância da optimização robusta usando meta-heurísticas é reconhecida por Kouvelis e Yu (1997), quando os autores escrevem: "*Acreditamos que deve ser despendido um esforço mais considerável no desenvolvimento sistemático de [...] esquemas meta-heurísticos, os quais com um esforço mínimo e adequado, podem ser aplicados a uma grande classe de problemas de optimização robusta, [...]*" (pág. 354).

Relativamente a abordagens em optimização robusta usando meta-heurísticas de pesquisa local, são conhecidas poucas na literatura.

Taillard (1990) e Battiti e Tecchiolli (1994) apresentaram técnicas para actualizar dinamicamente o tamanho da lista tabu, designadas de "Pesquisa Tabu Robusta" e "Pesquisa Tabu Reactiva", respectivamente. Estas técnicas podem-se considerar robustas porque determinam boas soluções sem exigirem extensas parametrizações do método.

Sörensen (2001) apresentou uma abordagem que consiste em adaptar a técnica de pesquisa tabu padrão para determinar soluções robustas e de boa qualidade (robustez no espaço dos objectivos – secção 3.4 deste capítulo). Esta abordagem consiste em substituir a função de avaliação associada à pesquisa tabu padrão, f(x), por uma nova, $f_r(x)$, designada de função de avaliação robusta, de forma a avaliar a qualidade das soluções. Apesar desta função de avaliação robusta aceitar diferentes formas, todas elas seguem os mesmos dois princípios seguintes:

<u>Princípio 1</u>: A função de avaliação robusta adiciona uma certa perturbação à solução corrente antes de a avaliar. Assim, a técnica de pesquisa tabu robusta avalia $x^* = x + \delta$ em vez de x, em que x^* designa-se por solução derivada e pode ou não pertencer ao espaço das soluções original. A perturbação adicionada é dependente da perturbação esperada dos dados do modelo e deve reflectir as alterações esperadas destes dados.

<u>Princípio 2</u>: A função de avaliação robusta avalia várias soluções derivadas (e não apenas uma), combinando-as num único valor da função de avaliação.

A forma geral de uma função de avaliação robusta é a seguinte:

$$f_r(x) = \frac{1}{ne} \sum_{i=1}^{ne} w_i \, f(x + \delta_i)$$

em que ne é o número de soluções derivadas que são avaliadas e w_i é o peso associado ao valor da função de avaliação da i-ésima solução derivada, $x + \delta_i$. Esta função pode ser determinística ou estocástica, de acordo com a natureza da perturbação adicionada.

Sörensen (2003) apresentou uma metodologia que consiste na utilização de uma meta-heurística de qualquer tipo e substituição da sua função de avaliação padrão por uma formulação robusta, de forma a orientar a pesquisa em direcção a soluções robustas. A robustez das soluções pode ser medida quer no espaço dos objectivos, quer no espaço das soluções (ver definições de robustez na secção 3.4 deste capítulo).

A função de avaliação robusta mais apropriada é escolhida de acordo com o tipo de robustez que é exigido. No entanto, uma função de avaliação robusta respeita sempre os seguintes princípios (Sörensen (2001) e Sörensen (2003)):

<u>Princípio 1</u>: Cada solução é avaliada sobre uma amostra de dados incertos do problema (solução derivada).

Princípio 2: As várias avaliações das soluções derivadas são combinadas na função de avaliação robusta (avaliação derivada).

Para se medir a robustez das soluções no *espaço dos objectivos*, usa-se uma função de avaliação robusta em que a qualidade das soluções é avaliada por amostragem dos dados incertos do problema. Uma possível função de avaliação robusta é a média pesada de ne avaliações derivadas (tal como em Sörensen (2001)):

$$f_r(x) = \frac{1}{ne} \sum_{i=1}^{ne} w_i \, f(x, \delta_i).$$

Uma outra função de avaliação robusta, mais moderada, permite analisar o desempenho de uma solução no pior caso entre todas as avaliações derivadas (para funções a minimizar):

$$f_r(x) = \max_{i=1,\dots,ne} f(x, \delta_i).$$

A robustez de uma solução medida no *espaço das soluções* é caracterizada pela proximidade (semelhança) a uma dada solução de referência, x_0, isto é, para a qual a *distância* à solução de referência (quando medida por alguma função de distância no espaço das soluções) é pequena (Sevaux e Sörensen (2004)). Para calcular a proximidade entre x_0 e x, utiliza-se uma qualquer métrica.

Nesta metodologia, a robustez pode ser medida apenas no espaço dos objectivos ou em ambos os espaços (dos objectivos e das soluções) em simultâneo.

Quando a robustez é medida apenas no espaço dos objectivos, a estrutura geral desta metodologia é a seguinte:

1) gerar muitas soluções diferentes, usando uma meta-heurística;
2) avaliar cada uma das soluções geradas, usando uma função de avaliação robusta;
3) seleccionar a solução com melhor desempenho, de acordo com a função de avaliação robusta.

Quando a robustez é medida nos espaços dos objectivos e das soluções em simultâneo, a estrutura geral desta metodologia é a seguinte:

1) gerar muitas soluções diferentes, usando uma meta-heurística;
2) calcular a qualidade de cada solução gerada e a distância entre a solução corrente e a solução de referência;
3) seleccionar a solução com o melhor compromisso entre os valores da robustez nos espaços dos objectivos e das soluções (usar um processo de apoio à decisão, tendo em conta as preferências do AD em relação à robustez nos dois espaços).

Relativamente às abordagens em optimização robusta usando meta-heurísticas baseadas em populações, é um assunto a tratar no próximo capítulo.