Árvore Binária de Pesquisa Balanceada Adelson-Velskii Landis (AVL)

Implementação com ligações simples (usando ponteiros e memória dinâmica)

Definição

O equilíbrio perfeito de uma árvore

- Acontece quando as subárvores esquerda e direita têm a mesma altura
- Exigiria algoritmos de inserção e de remoção muito complexos
- É conveniente definir uma condição de equilíbrio que seja fácil de manter

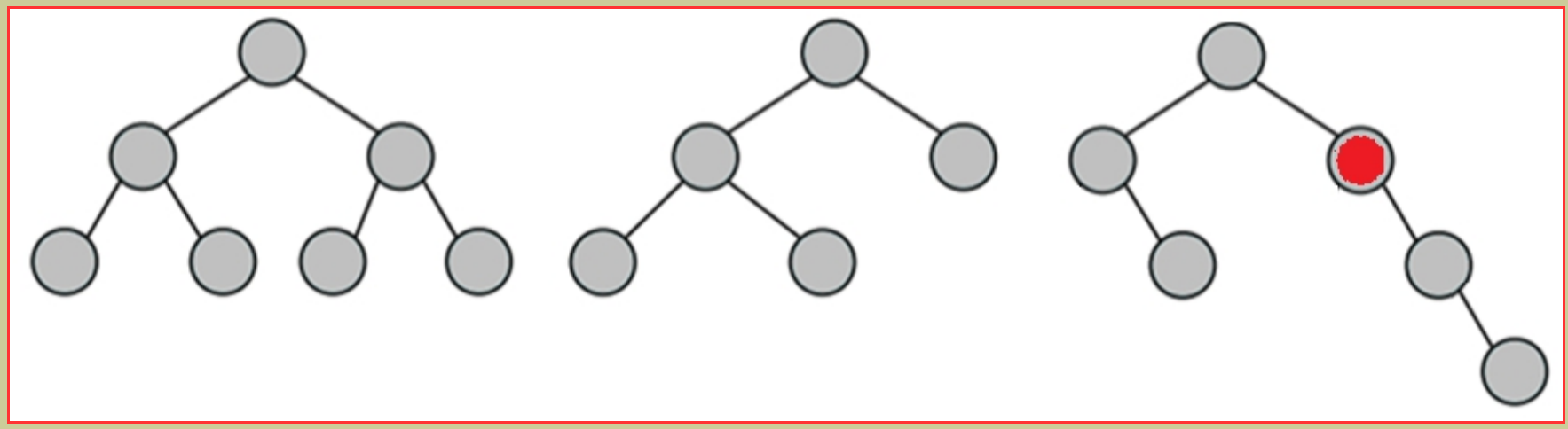
Uma boa condição de equilíbrio consiste na seguinte definição

- Uma árvore equilibrada em altura é uma árvore em que a diferença das alturas entre as subárvores esquerda e direita, em cada nodo, não seja superior a uma unidade

Assim, a árvore com a "melhor altura"

- É aquela que tem o maior número de nodos para uma qualquer altura (a árvore binária de pesquisa completa)

Exemplos



Árvore **AVL** Árvore **AVL** Árvore **não AVL**

Operações sobre uma Árvore AVL

- Seguem as mesmas estratégias usadas para as ABP, com exceção das operações para **inserir** e **remover**
- Depois de se **inserir** ou **remover** um elemento de uma árvore, é necessário
  - atualizar as alturas
  - reequilibrar a árvore, caso tenha ficado desequilibrada

Operações básicas sobre uma Árvore AVL

Criar uma Árvore AVL (vazia)

Libertar/destruir uma Árvore AVL

Verificar se uma Árvore AVL está vazia

Mostrar os elementos de uma Árvore AVL: pré-ordem, em-ordem e pós-ordem

Pesquisar um elemento numa Árvore AVL

Atualizar um elemento de uma Árvore AVL

Inserir um elemento numa Árvore AVL

Remover um elemento de uma Árvore AVL

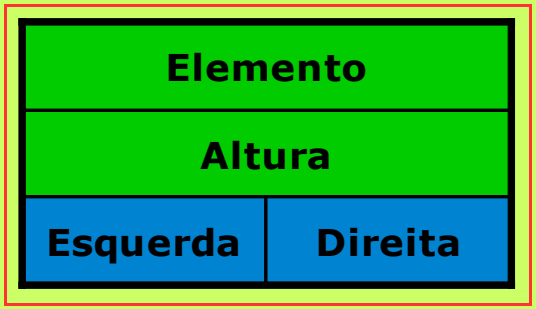
Nodos e ligações

Manipulação de uma ABP do tipo AVL

- Para manipular uma árvore AVL é preciso guardar, em cada nodo, a sua **altura**, que representa a altura da subárvore com raiz nesse nodo
- Assim, o nodo de uma árvore AVL é idêntico ao nodo de uma ABP, à qual se juntou o campo **Altura**

Definição de um nodo de uma árvore AVL

```
struct NodoAVL {
    INFOAVL  Elemento;
    int    Altura;
    struct NodoAVL *Esquerda;
    struct NodoAVL *Direita;
};
typedef  struct NodoAVL *PNodoAVL;
```



Operações sobre a estrutura INFOAVL

Mostrar os dados de um elemento do tipo INFOAVL

void **mostrarElementoAVL** (**INFOAVL** X)

- operação que mostra os dados/informação do elemento X do tipo INFOAB

Criar um elemento do tipo INFOAVL

INFOAVL criarElementoAVL ()

- operação para criar um elemento do tipo INFOAB, com dados vindos de fonte adequada

Comparar 2 elementos, X e Y, do tipo INFOAVL

int **compararElementosAVL** (**INFOAVL** X, **INFOAVL** Y)

- operação que compara dois elementos do tipo INFOAB, segundo um dos seus campos
- devolve: **-1** (X < Y), **0** (X = Y) ou **1** (X > Y)

Operações sobre um nodo de uma árvore AVL

Criar um nodo de uma árvore AVL

Entrada: a informação X que se pretende guardar
Saída: ponteiro para um nodo com a informação X

```
PNodoAVL criarNodoAVL (INFOAVL X)
{
  PNodoAVL  P;
  P = (PNodoAVL) malloc(sizeof(struct NodoAVL));
  if (P == NULL)
     return NULL;
  P→Elemento = X;
  P→Altura = 0;
  P→Esquerda = NULL;
  P→Direita = NULL;
  return P;
}
```

Libertar/destruir um nodo de uma árvore AVL

- Adaptar a implementada para Árvores Binárias

Entrada: um ponteiro para o nodo que se pretende destruir
Saída: o ponteiro a apontar para NULL

```
PNodoAVL libertarNodoAVL (PNodoAVL P)
{
  P→Esquerda = NULL;
  P→Direita = NULL;
  free(P);
  P = NULL;
  return P;
}
```

Operações sobre uma Árvore AVL

Criar uma Árvore AVL (vazia)

PNodoAVL **criarAVL** ()

- adaptar a implementada para Árvores Binárias

Libertar/destruir uma Árvore AVL

PNodoAVL **destruirAVL** (PNodoAVL T)

- adaptar a implementada para Árvores Binárias

Verificar se uma Árvore AVL está vazia

int **AVLVazia** (PNodoAVL T)

- adaptar a implementada para Árvores Binárias

Mostrar os elementos de uma Árvore AVL

void **mostrarEmOrdemAVL** (PNodoAVL T)

void **mostrarPreOrdemAVL** (PNodoAVL T)

void **mostrarPosOrdemAVL** (PNodoAVL T)

- adaptar as implementadas para Árvores Binárias

Pesquisar um elemento numa Árvore AVL

PNodoAVL **pesquisarAVL** (INFOAVL X, PNodoAVL T)

- adaptar a implementada para Árvores Binárias de Pesquisa

Atualizar um elemento numa Árvore AVL

PNodoAVL **atualizarElementoAVL** (INFOAVL X, INFOAVL Novo, PNodoAVL T)

- adaptar a implementada para Árvores Binárias de Pesquisa

Inserir um elemento numa árvore AVL

- A inserção de um nodo numa árvore AVL, consiste em
  - usar o mesmo mecanismo de inserção de um nodo numa ABP (uma AVL é uma ABP), em que aquele nodo é inserido como folha da árvore (com altura 0)
  - após a inserção do nodo na árvore, é necessário realizar duas operações:
    1º: atualizar a altura dos nodos já existentes na árvore
    2º: verificar a necessidade de equilibrar a árvore

- Atualização da altura dos nodos da árvore
  - basta, no pior caso, atualizar a altura dos nodos que definem o caminho da raiz da árvore ao nodo (folha) inserido
  - quando o nodo é inserido na subárvore de um nodo de menor altura, apenas é necessário atualizar as alturas dos nodos desta subárvore

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Equilibrar uma árvore, através de operações de **rotações**
  - rotação simples à esquerda
  - rotação simples à direita
  - rotação dupla à esquerda
  - rotação dupla à direita

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Operação de inserção
  - A operação de inserção de um elemento numa árvore AVL
    - é semelhante à apresentada para o caso de uma árvore binária de pesquisa
    - à qual se acrescentou a operação de reequilibrio
  - Na travessia da árvore é usada a pesquisa binária recursiva para
    - determinar se o elemento a inserir **não existe** na árvore, e
    - marcar o nodo exterior (pai) de inserção, caso não exista
  - Depois de inserir um nodo com o elemento na árvore, que é uma folha,
    - no caminho de retorno desta folha até à raíz, a operação de reequilibrio (função **equilibrarAVL**) é realizada de forma
      - a reequilibrar a árvore e
      - a atualizar as alturas dos nodos envolvidos, caso seja necessário

Inserir um elemento numa árvore AVL

Entrada: ponteiro para a árvore AVL e elemento a inserir (que não existe na AVL)
Saída: ponteiro da raíz da árvore AVL atualizado

```
PNodoAVL inserirAVL (PNodoAVL T, INFOAVL X)
{
  if (T == NULL) {
     T = criarNodoAVL(X);
     return  T;
  }
  if (compararElementosAVL(T→Elemento, X) == 1)     //  T→Elemento > X
     T→Esquerda = inserirAVL(T→Esquerda, X);
  else     //  T→Elemento < X, pois X não está na árvore
     T→Direita = inserirAVL(T→Direita, X);
  T→Altura = atualizarAlturaNodo(T);
  T = equilibrarAVL(T);        //  reequilibrar a árvore
  return T;
}
```

Inserir um elemento numa árvore AVL

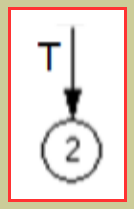
- Descrição: atualizar o campo "Altura" do nodo raiz de uma árvore AVL

Operação: atualizar altura da raiz de uma árvore
Entrada: ponteiro para a raiz da árvore (ou subárvore) AVL a atualizar altura
Saída: inteiro correspondente à altura atualizada da raiz da AVL

```
int atualizarAlturaNodo (PNodoAVL T)
{
  int  altEsq, altDir;
  if (T == NULL)
      return -1;
  altEsq = T→Esquerda→Altura;
  altDir = T→Direita→Altura;
  if (altEsq > altDir)
      return altEsq + 1;
  else
      return altDir + 1;
}
```

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Inserção de um **nodo** com o elemento **2** numa árvore AVL

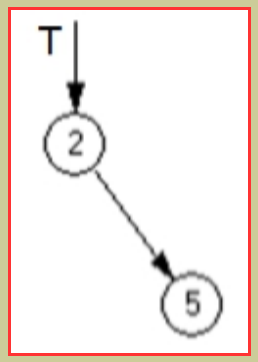


- atualização da altura dos nodos:
  - a **altura** do nodo com o **2** (**raiz**) é **0**

- a **árvore** está **equilibrada**

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Inserção de um **nodo** com o elemento **5** na árvore AVL

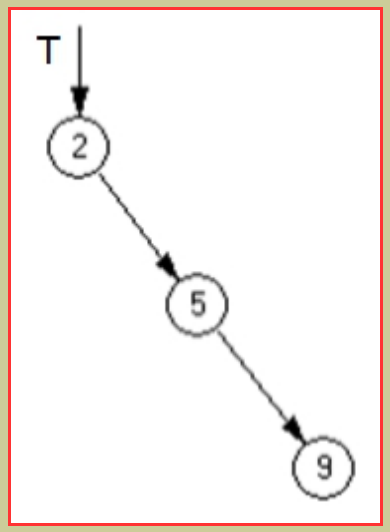


  - atualização da altura dos nodos:
    - a **altura** do **nodo** com o **2** (**raiz**) passou de 0 para **1**
    - a **altura** do **nodo** com o **5** é **0**

  - a **árvore** continua **equilibrada**

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Inserção de um **nodo** com o elemento **9** na árvore AVL

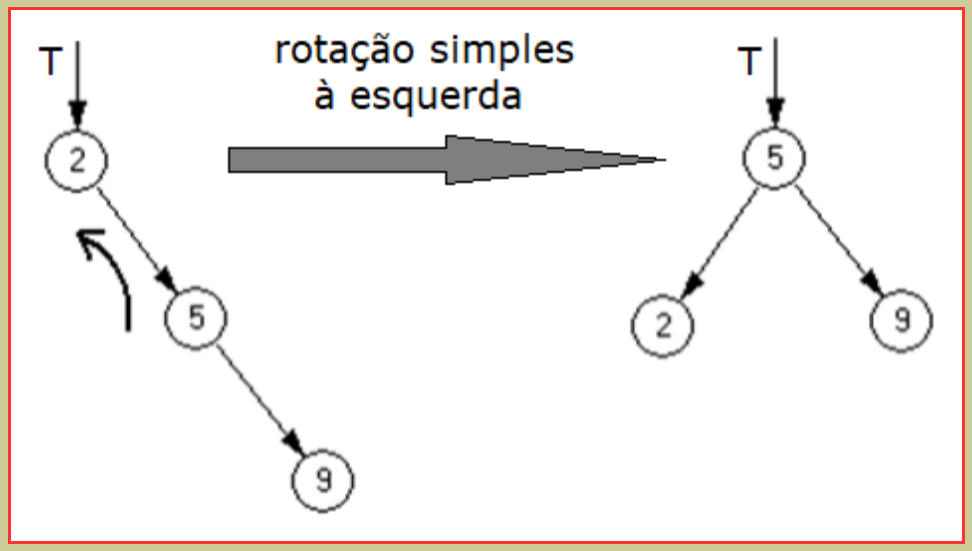


- atualização da altura dos nodos:
  - a **altura** do nodo com o **2** (**raiz**) passou de 1 para **2**
  - a **altura** do nodo com o **5** passou de 0 para **1**
  - a **altura** do nodo com o **9** é **0**

- a **árvore** fica **desequilibrada** no **nodo** com o **2** (**raiz**), pois a diferença de alturas entre as suas subárvores é 2:
  - a altura da sua subárvore esquerda (vazia) é -1
  - a altura da sua subárvore direita (com **raiz** em 5) é 1

Inserir um elemento numa árvore AVL

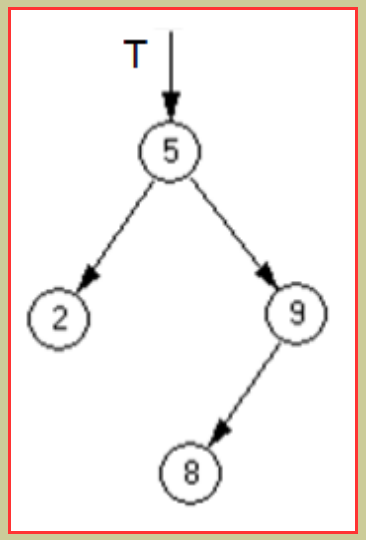
- Reequilibrar a árvore através de uma rotação simples à esquerda
  - efetuar uma **rotação simples à esquerda** do **nodo** com o **2**, **usando** o seu **filho direito** (o **nodo** com o **5**)



  - atualização da altura dos nodos:
    - a **altura** do **nodo** com o **5** (agora **raiz**) mantém-se em **1**
    - a **altura** do **nodo** com o **2** passa de 2 para **0**
    - a **altura** do **nodo** com o **9** mantém o valor **0**
  - o **nodo** com o **5** é agora a **raiz** da árvore (era o filho direito do nodo com o 2)
  - a **árvore** ficou **equilibrada**

Inserir um elemento numa árvore AVL

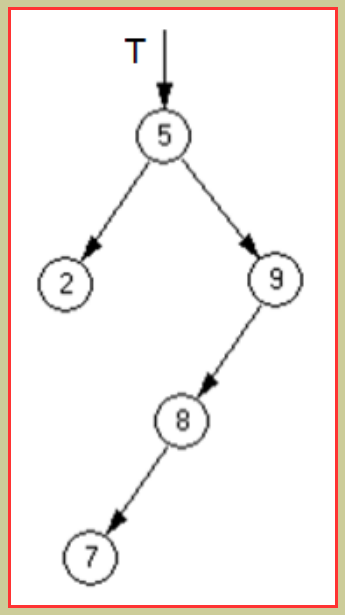
- Inserção de um nodo com o elemento 8 (com altura 0) na árvore AVL



  - atualização da altura dos nodos:
    - a **altura** do **nodo** com o **5** (**raiz**) passa de 1 para **2**
    - a **altura** do **nodo** com o **9** passa de 0 para **1**
    - a **altura** do **nodo** com o **2** mantém-se com **0**
  - a **árvore** mantém-se **equilibrada**

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Inserção de um nodo com o elemento 7 (com altura 0) na árvore AVL

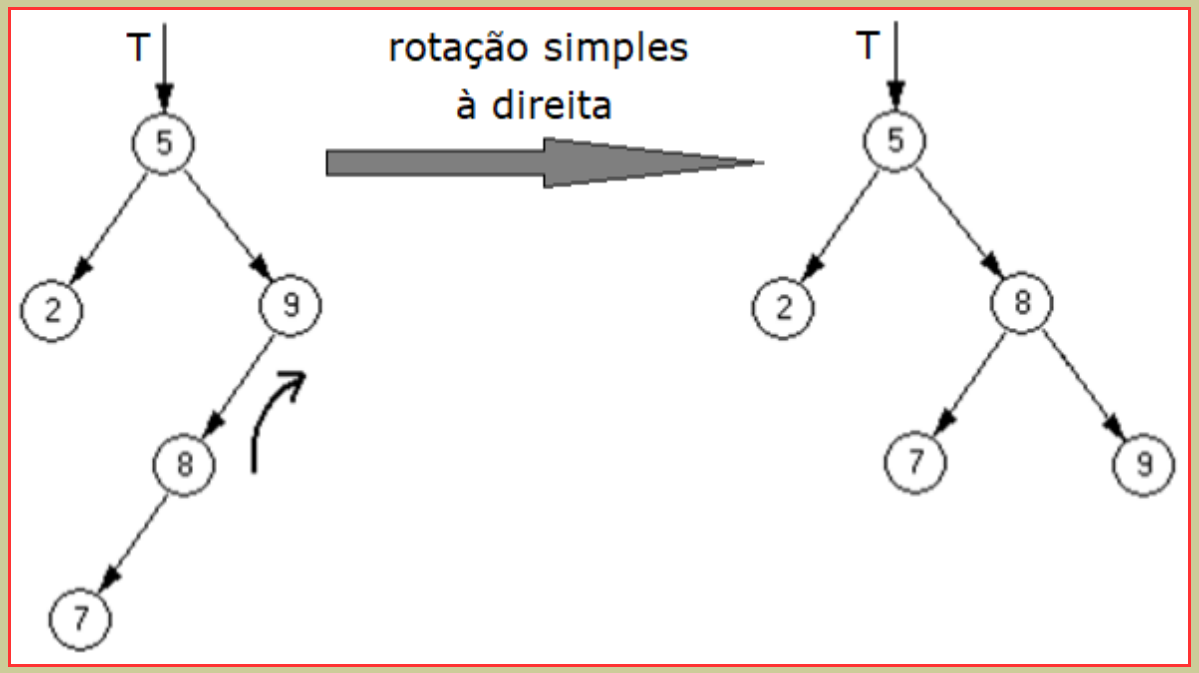


- atualização da altura dos nodos:
  - a **altura** do **nodo** com o **5** (**raiz**) é atualizada de 2 para **3**
  - a **altura** do **nodo** com o **9** é atualizada de 1 para **2**
  - a **altura** do **nodo** com o **8** é atualizada de 0 para **1**
  - a **altura** do **nodo** com o **2** mantém-se com **0**

- a **árvore** fica **desequilibrada** no **nodo** com o **9** (com **altura 2**)
  - a **altura** da sua **subárvore esquerda** (com **raiz** no **nodo** com o **8**) é **1**
  - a **altura** da sua **subárvore direita** (vazia) é **-1** (por definição)
- a **árvore** fica **desequilibrada** no **nodo** com o **5** (com **altura 3**)
  - a **altura** da sua **subárvore esquerda** (com **raiz** no **nodo** com o **2**) é **0**
  - a **altura** da sua **subárvore direita** (com **raiz** no **nodo** com o **9**) é **2**

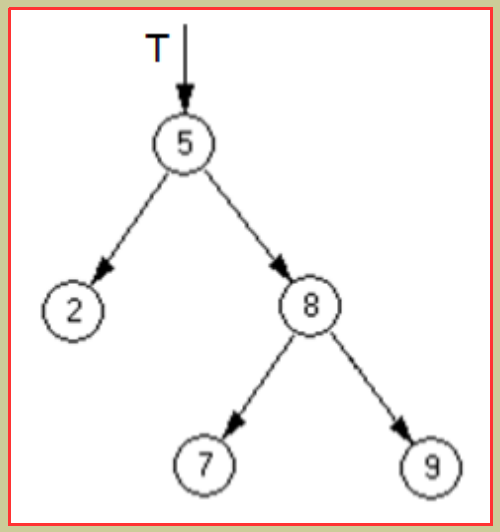
Inserir um elemento numa árvore AVL

- Reequilibrar a árvore através de uma rotação simples à direita
  - efetuar uma **rotação simples à direita** do **nodo** com o **9**, **usando** o seu **filho esquerdo** (o **nodo** com o **8**)
  - o **nodo** com o **8** passa a ser a **raiz** desta subárvore (com 7, 8 e 9)



Inserir um elemento numa árvore AVL

- Após esta rotação



- atualização da altura dos nodos:
  - a **altura** do **nodo** com o **5** passa de 3 para **2**
  - a **altura** do **nodo** com o **8** mantém-se em **1**
  - a **altura** do **nodo** com o **9** passa de 2 para **0**
  - a **altura** do **nodo** com o **7** mantém-se com **0**
  - a **altura** do **nodo** com o **2** mantém-se com **0**

- a **árvore** fica **equilibrada** no **nodo** com o **8** (com **altura 1**)
  - a **altura** da **subárvore direita** (com **raiz** no **nodo** com o **9**) é **0**
  - a **altura** da **subárvore esquerda** (com **raiz** no **nodo** com o **7**) é **0**
- a **árvore** torna-se automaticamente **equilibrada** no **nodo** com o **5** (com **altura 2**)
  - a **altura** da sua **subárvore direita** (com **raiz** no **nodo** com o **8**) é **1**
  - a **altura** da **subárvore esquerda** (com **raiz** no **nodo** com o **2**) é **0**

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Há necessidade de aplicar uma operação de **rotação simples**, quando se está perante uma **inserção externa**
  - acontece quando o nodo é inserido
    - à esquerda do filho esquerdo, ou
    - à direita do filho direito
  - a árvore facilmente se torna equilibrada (o desequilibrio acontece após esta inserção), aplicando a um único nodo uma única rotação, respetivamente
    - à direita, ou
    - à esquerda

Inserir um elemento numa árvore AVL

Operação: rotação simples à esquerda
Entrada: ponteiro para o nodo da árvore AVL onde se deteta o desequilibrio
Saída: ponteiro anterior atualizado

```
PNodoAVL rotacaoSimplesEsquerda (PNodoAVL P) {
  int  altEsq, altDir;
  PNodoAVL  nodoAux = P→Direita;
  P→Direita = nodoAux→Esquerda;
  nodoAux→Esquerda = P;
  // atualizar a altura do nodo P (um dos envolvidos na rotação)
  altEsq = P→Esquerda→Altura;
  altDir = P→Direita→Altura;
  if (altEsq > altDir)
     P→Altura = altEsq + 1;
  else
     P→Altura = altDir + 1;
...
```

Inserir um elemento numa árvore AVL

Operação: rotação simples à esquerda (cont.)

```
...
  // atualizar a altura do nodo nodoAux (um dos envolvidos na rotação)
  altEsq = nodoAux→Esquerda→Altura;       // nodoAux→Esquerda = P
  altDir = nodoAux→Direita→Altura;
  if (altEsq > altDir)
      nodoAux→Altura = altEsq + 1;
  else
      nodoAux→Altura = altDir + 1;
  return  nodoAux;
}
```

Inserir um elemento numa árvore AVL

Operação: rotação simples à direita
Entrada: ponteiro para o nodo da árvore AVL onde se deteta o desequilibrio
Saída: ponteiro anterior atualizado

```
PNodoAVL rotacaoSimplesDireita (PNodoAVL P) {
  int  altEsq, altDir;
  PNodoAVL  nodoAux = P→Esquerda;
  P→Esquerda = nodoAux→Direita;
  nodoAux→Direita = P;
  // atualizar a altura do nodo P (um dos envolvidos na rotação)
  altEsq = P→Esquerda→Altura;
  altDir = P→Direita→Altura;
  if (altEsq > altDir)
     P→Altura = altEsq + 1;
  else
     P→Altura = altDir + 1;
...
```

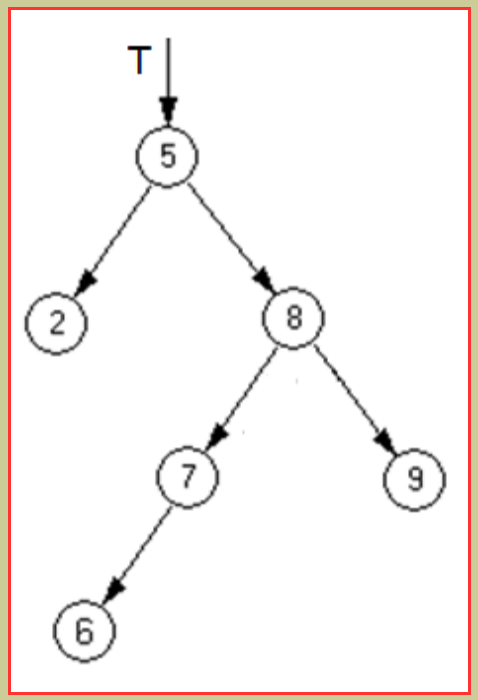
Inserir um elemento numa árvore AVL

Operação: rotação simples à direita (cont.)

```
  ...
  // atualizar a altura do nodo nodoAux (um dos envolvidos na rotação)
  altEsq = nodoAux→Esquerda→Altura;
  altDir = nodoAux→Direita→Altura;   //  nodoAux→Direita = P
  if (altEsq > altDir)
     nodoAux→Altura = altEsq + 1;
  else
     nodoAux→Altura = altDir + 1;
  return  nodoAux;
}
```

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Inserir um nodo com o elemento 6 numa árvore AVL

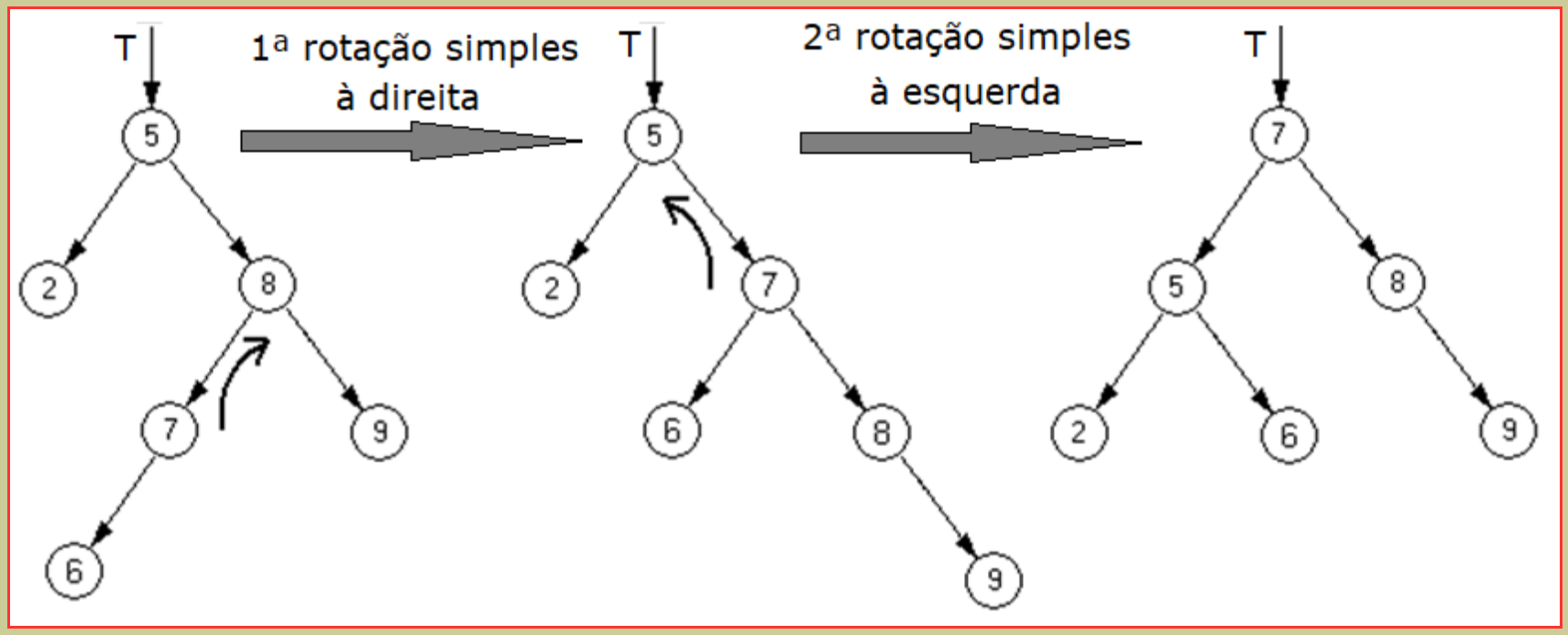


- atualização da altura dos nodos:
  - a **altura** do **nodo** com o **5** (**raiz**) é atualizada de 2 para **3**
  - a **altura** do **nodo** com o **8** é atualizada de 1 para **2**
  - a **altura** do **nodo** com o **7** é atualizada de 0 para **1**
  - a **altura** do **nodo** com o **9** mantém-se com **0**
  - a **altura** do **nodo** com o **2** mantém-se com **0**

- a **árvore** fica **desequilibrada** no **nodo** com o **5** (com **altura 3**)
  - a **altura** da sua **subárvore esquerda** (com **raiz** no **nodo** com o **2**) é **0**
  - a **altura** da sua **subárvore direita** (com **raiz** no **nodo** com o **8**) é **2**

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Reequilibrar a árvore através de uma **rotação dupla à esquerda**



- uma **rotação dupla à esquerda** consiste em efetuar duas rotações simples seguidas usando o mesmo nodo (o nodo 7)
  - rotação simples à **direita** do nodo 8 (filho direito de 5) usando o nodo 7, seguida
  - rotação simples à **esquerda** do nodo 5 usando o nodo 7

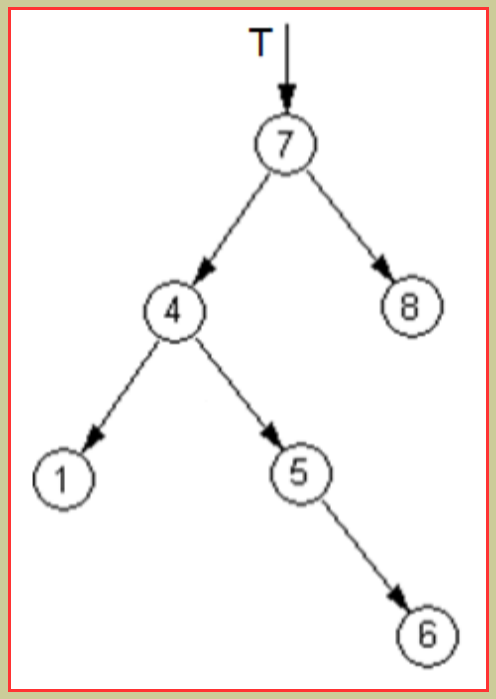
Inserir um elemento numa árvore AVL

Operação: rotação dupla à esquerda
Entrada: ponteiro para o nodo da árvore AVL onde se deteta o desequilibrio
Saída: ponteiro anterior atualizado

```
PNodoAVL rotacaoDuplaEsquerda (PNodoAVL  P)
{
  P→Direita = rotacaoSimplesDireita(P→Direita);
  P = rotacaoSimplesEsquerda(P);
  return P;
}
```

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Inserir um nodo com o elemento 6 numa árvore AVL

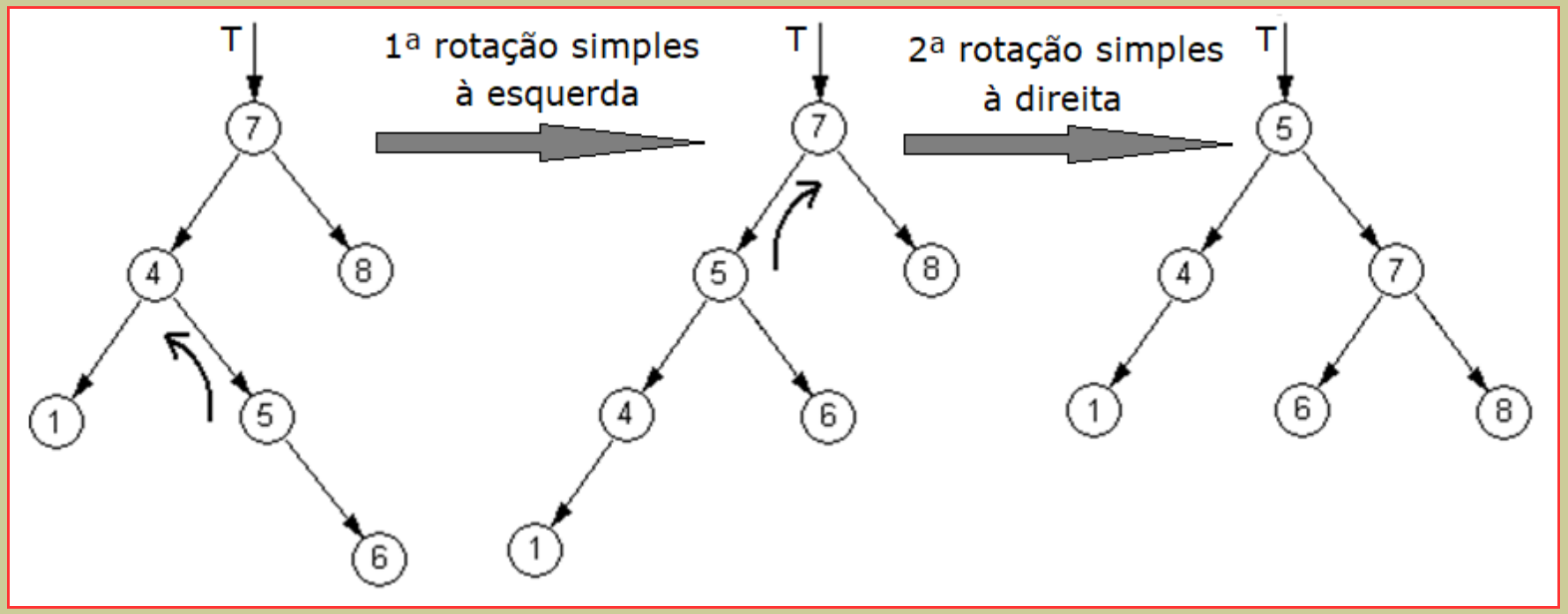


- atualização da altura dos nodos:
  - a **altura** do **nodo** com o **7** (**raiz**) é atualizada de 2 para **3**
  - a **altura** do **nodo** com o **4** é atualizada de 1 para **2**
  - a **altura** do **nodo** com o **5** é atualizada de 0 para **1**
  - a **altura** do **nodo** com o **6** mantém-se com **0**
  - a **altura** do **nodo** com o **8** mantém-se com **0**

- a **árvore** fica **desequilibrada** no **nodo** com o **7** (com **altura 3**)
  - a **altura** da sua **subárvore esquerda** (com **raiz** no **nodo** com o **8**) é **0**
  - a **altura** da sua **subárvore direita** (com **raiz** no **nodo** com o **4**) é **2**

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Reequilibrar a árvore através de uma **rotação dupla à direita**



- uma **rotação dupla à direita** consiste em efetuar duas rotações simples seguidas usando o mesmo nodo (o nodo 5)
  - rotação simples à esquerda do nodo 4 (filho esquerdo de 7) usando o nodo 5,
  - rotação simples à direita do nodo 7 usando o nodo 5

Inserir um elemento numa árvore AVL

Operação: rotação dupla à direita
Entrada: ponteiro para o nodo da árvore AVL onde se deteta o desequilibrio
Saída: ponteiro anterior atualizado

```
PNodoAVL rotacaoDuplaDireita (PNodoAVL P)
{
  P→Esquerda = rotacaoSimplesEsquerda(P→Esquerda);
  P = rotacaoSimplesDireita(P);
  return P;
}
```

Inserir um elemento numa árvore AVL

- Há necessidade de aplicar uma operação de **rotação dupla**, quando se está perante uma **inserção interna**
  - acontece quando o nodo é inserido
    - à esquerda do filho direito, ou
    - à direita do filho esquerdo
  - a árvore facilmente se torna equilibrada (o desequilibrio acontece após esta inserção), aplicando a dois nodos uma rotação simples a cada um deles seguidas, respetivamente
    - à direita seguida de à esquerda, ou
    - à esquerda seguida de à direita

Inserir um elemento numa árvore AVL

Operação: equilibrar ABP do tipo AVL
Entrada: ponteiro para o nodo da árvore onde se deteta desequilibrio (subárvore)
Saída: ponteiro anterior atualizado (se realizou reequilibrio)

```
PNodoAVL equilibrarAVL (PNodoAVL T) {
  int  altEsq, altDir;
  if (T == NULL)     return  T;
  altEsq = T→Esquerda→Altura;
  altDir = T→Direita→Altura;
  if (altEsq – altDir == 2) {          // subárvore esquerda desequilibrada
     altEsq = T→Esquerda→Esquerda→Altura;
     altDir = T→Esquerda→Direita→Altura;
     if (altEsq >= altDir)
        T = rotacaoSimplesDireita(T);
     else
        T = rotacaoDuplaDireita(T);
  }
...
```

Inserir um elemento numa árvore AVL

Operação: equilibrar ABP do tipo AVL (cont.)

```
...
  else
     if (altDir – altEsq == 2) {     // subárvore direita desequilibrada
        altEsq = T→Direita→Esquerda→Altura;
        altDir = T→Direita→Direita→Altura;
        if (altDir >= altEsq)
           T = rotacaoSimplesEsquerda(T);
        else
           T = rotacaoDuplaEsquerda(T);
     }
  return T;
}
```

Remover um elemento de uma árvore AVL

- A remoção de elementos numa árvore AVL provoca o efeito simétrico da inserção
- A **remoção interna** (remoção à direita do filho esquerdo ou à esquerda do filho direito) de um nodo
  - desequilibra a árvore da mesma forma que a inserção externa
  - é reequilibrada com uma rotação simples
- A **remoção externa** (remoção à esquerda do filho esquerdo ou à direita do filho direito) de um nodo
  - desequilibra a árvore da mesma forma que a inserção interna
  - é reequilibrada com uma rotação dupla

Remover um elemento de uma árvore AVL

- Este processo implica, para além da remoção do nodo,
  - a atualização das alturas dos nodos pertencentes ao caminho entre o nodo removido e a raíz da árvore, e
  - aplicar as rotações adequadas para reequilibrar a árvore (se necessário)
- Com exceção do reequilibrio da árvore, este mecanismo é semelhante ao usado para a remoção de um elemento de uma ABP
  - na remoção do nodo, e
  - no ajuste das ligações
- O mecanismo de remoção de um nodo de uma AVL combina os mecanismos
  - de remoção de um elemento de uma árvore binária de pesquisa e
  - de equilibrio de uma árvore AVL

Remover um elemento de uma árvore AVL

Entrada: uma árvore AVL e o elemento (existe na árvore) a remover
Saída: árvore AVL atualizada

```
PNodoAVL removerAVL (PNodoAVL T, INFOAVL X) {
  if (compararElementosAVL(T→Elemento, X) == 0) {  // T→Elemento = X
     T = removerNodoAVL(T);
     return  T;
  }
  if (compararElementosAVL(T→Elemento, X) == 1)     // T→Elemento > X
     T→Esquerda = removerAVL(T→Esquerda, X);
  else
     T→Direita = removerAVL(T→Direita, X);
  if (T != NULL) {
     T→Altura = atualizarAlturaNodo(T);
     T = equilibrarAVL(T);          // reequilibrar a árvore
  }
  return T;
}
```

Remover um elemento de uma árvore AVL

- Mecanismo muito semelhante ao usado em ABP
- Se o nodo a remover tem dois filhos, então é necessário substituir o seu elemento pelo menor da sua subárvore direita (**substituirNodoMinAVL**)

Remover um elemento de uma árvore AVL

Operação: remover um nodo de uma árvore AVL
Entrada: ponteiro para o pai do nodo da árvore AVL a remover
Saída: ponteiro para o pai do nodo removido atualizado

```
PNodoAVL removerNodoAVL (PNodoAVL T)
{
  PNodoAVL  nodoAux = T;
  INFOAVL  X;
  if (T→Esquerda == NULL  &&  T→Direita == NULL)  // remover uma folha
     T = libertarNodoAVL(T);
  else
     if (T→Esquerda == NULL) {       // só subárvore direita
        T = T→Direita;
        nodoAux = libertarNodoAVL(nodoAux);
     }
     else
...
```

Remover um elemento de uma árvore AVL

Operação: remover um nodo de uma árvore AVL (cont.)

```
...
        if (T→Direita == NULL) {  // só subárvore esquerda
            T = T→Esquerda;
            nodoAux = destruirNodoAVL(nodoAux);
        }
        else {
            // duas subárvores não vazias: substituir pelo menor elemento da direita
            T→Direita = substituirNodoMinAVL(T→Direita, &X);
            T→Elemento = X;
        }
    if (T != NULL) {
        T→Altura = atualizarAlturaNodo(T);
        T = equilibrarAVL(T);    // reequilibrar a árvore
    }
    return  T;
}
```

Remover um elemento de uma árvore AVL

- O mecanismo de substituir um elemento pelo menor elemento da subárvore direita do nodo com aquele elemento, consiste em
  - pesquisar recursivamente o nodo mais à esquerda das subárvores direitas desde aquele nodo
  - copiar o elemento do nodo substituto para o elemento do nodo a remover
  - ligar a subárvore direita do nodo substituto à subárvore esquerda do nodo anterior, e
  - destruir o nodo substituto
- Como esta operação pode desequilibrar a árvore, é usada no fim a operação de reequilibrio de uma árvore AVL

Remover um elemento de uma árvore AVL

Entrada: ponteiro para o raíz da árvore AVL
Saída: ponteiro para o nodo pai do nodo substituto e o menor elemento (substituto)

```
PNodoAVL substituirNodoMinAVL (PNodoAVL T, INFOAVL *X) {
  PNodoAVL  nodoAux = T;
  if (T→Esquerda == NULL) {
     *X = T→Elemento;
     T = T→Direita;
     nodoAux = libertarNodoAVL(nodoAux);
  }
  else
     T→Esquerda = substituirNodoMinAVL(T→Esquerda, X);
  if (T != NULL) {
     T→Altura = atualizarAlturaNodo(T);
     T = equilibrarAVL(T);
  }
  return  T;
}
```

Operação de reequilibrio

- Consiste nos seguintes passos
  - calcular as alturas das subárvores do nodo onde poderá existir desequilibrio
  - determinar se existe um desequilibrio na árvore naquele nodo
  - se a árvore está desequilibrada, realizar a rotação adequada, a qual também atualiza a altura dos nodos envolvidos na rotação afetuada
  - se a árvore continua equilibrada, então é necessário atualizar a altura do nodo inspecionado
- Existem dois tipos de desequilibrios num nodo duma árvore AVL
  - **externo**:
    - acontece após uma inserção externa ou uma remoção interna
    - sendo corrigido com uma rotação simples
  - **interno**:
    - acontece após uma inserção interna ou uma remoção externa
    - sendo corrigido com uma rotação dupla

Operação de reequilibrio

- Se existe desequilibrio na sua subárvore esquerda de um nodo, então
  - é necessário realizar uma rotação à direita
  - se a altura da subárvore esquerda é maior ou igual à altura da subárvore direita, do filho esquerdo deste nodo
    - então existe um desequilibrio externo
    - senão existe um desequilibrio interno
- Se o desequilibrio ocorrer na subárvore direita daquele nodo, então
  - é necessário fazer uma rotação à esquerda
  - se a altura da subárvore direita é maior ou igual à altura da subárvore esquerda, do filho direito do nodo
    - então existe um desequilibrio externo
    - senão existe um desequilibrio interno
- Se não existe qualquer desequilibrio no nodo, então
  - apenas será atualizado a sua altura