

Árvore (Binária) de Pesquisa Balanceada

Árvore de Intervalos

Introdução

Considere-se a seguinte situação

- Tem-se um conjunto de intervalos sobre o qual é necessário as seguintes operações de forma eficiente
 - inserir um intervalo
 - remover um intervalo
 - pesquisar um intervalo X: verificar se um dado X sobrepõe a um dos intervalos existentes

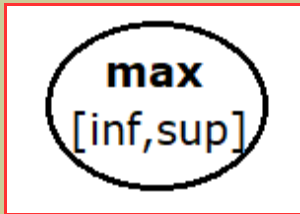
Ideia

- Acrescentar a uma Árvore Binária de Pesquisa (ABP) um conjunto de intervalos, de forma que todas as operações tenham ordem de complexidade $O(\log n)$
- A ABP pode ser não balanceada ou balanceada (como é o caso de uma Árvore Preto-Vermelho e Árvore AVL)

Definição

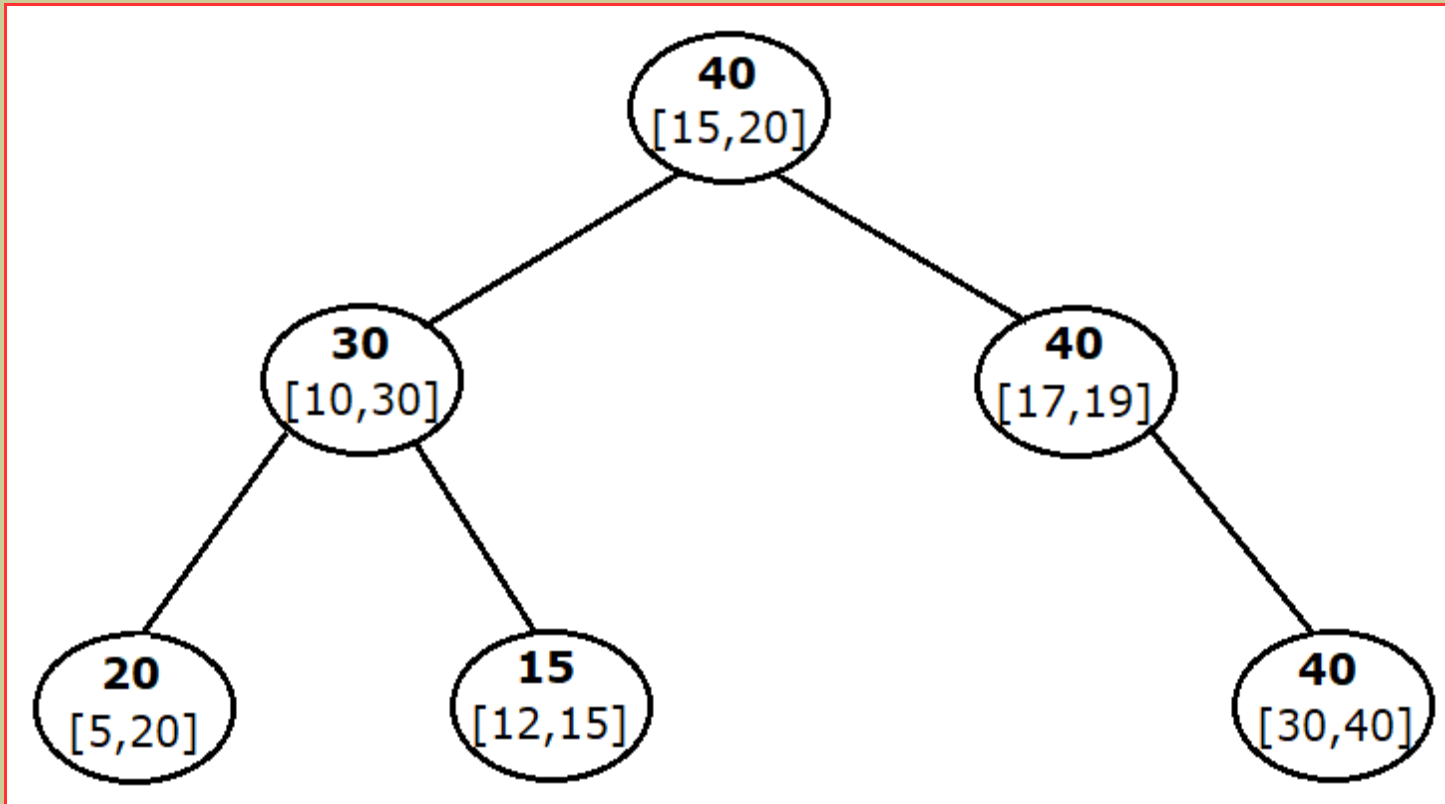
Árvore de Intervalos

- É uma ABP em que cada nodo X guarda os seguintes dados
 - um intervalo que é representado como um par **[inf, sup]**
 - o maior limite superior dos intervalos da subárvore enraizada no nodo X, **max**



- O valor **inf** do intervalo é usado como **chave** para manter as propriedades de ABP
- As operações de inserção e remoção de um nodo seguem os mesmos métodos usados para as ABP

Exemplo



- Informação do nodo (30; [10,30]):
 - **max** = **30** (maior valor da subárvore com raiz neste nodo) = $\max\{20, 15, 30\}$
 - **inf** = **10** (limite inferior do intervalo e chave da ABP)
 - **sup** = **30** (limite superior do intervalo)

Operações sobre uma árvore de intervalos

Inserir um intervalo numa árvore de intervalos

- É a mesma usada para as ABP, em que a chave é o valor de **inf**
- Um nodo com a informação de um intervalo [inf, sup] é criado da seguinte forma:
 - o intervalo [**inf**, **sup**] e o valor **max** = **sup**
- A inserção do intervalo [inf, sup] é feito da forma que se segue

Passo 1. criar o nodo com o intervalo [**inf**, **sup**] e o valor **max**, em que $\text{max} = \text{sup}$

Passo 2. inserir o novo nodo da árvore, usando como **chave** o valor de **inf** dos nodos

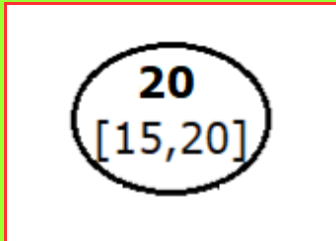
Passo 3. atualizar os valores de **max** dos antepassados do nodo inserido

Inserir um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: inserir o intervalo $[15, 20]$ numa árvore vazia

Passo 1. criar o nodo (**20**, $[15, 20]$), em que o valor **max** = sup = **20**

Passo 2. como é o primeiro nodo inserido, então é a raiz da árvore



Passo 3. como é o primeiro nodo inserido, a atualização não é necessária

Inserir um intervalo numa árvore de intervalos

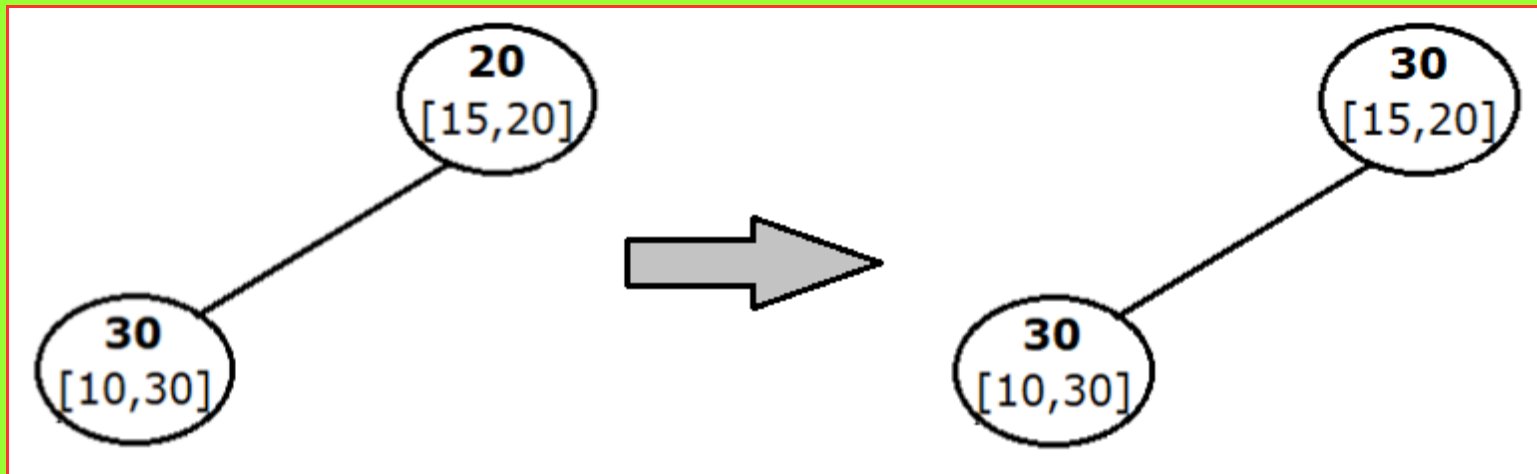
- Exemplo: inserir o intervalo $[10, 30]$ na árvore anterior

Passo 1. criar o nodo (**30**, $[10, 30]$), em que o valor **max** = sup = **30**

Passo 2. comparar o **inf** deste nodo com o **inf** da raiz:

(se for menor, então inserir o nodo à esquerda, senão inserir à direita da raiz)

$10 < 15 \Rightarrow$ inserir à esquerda da raiz



Passo 3. atualizar o valor de **max** da raiz:

max = $\max\{20, 30\} = 30$

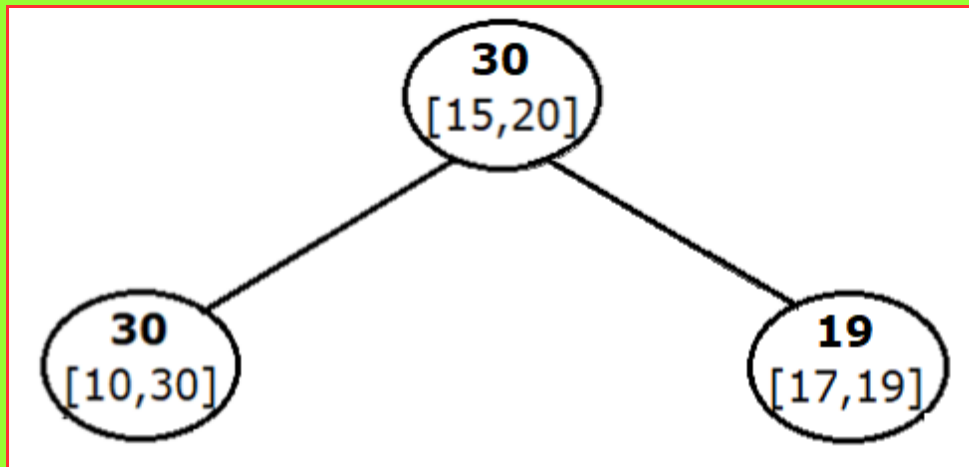
Inserir um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: inserir o intervalo $[17, 19]$ na árvore anterior

Passo 1. criar o nodo (**19**, $[17, 19]$), em que o valor **max** = sup = **19**

Passo 2. comparar os valores **inf** do nodo e da raiz:

$17 > 15 \Rightarrow$ inserir à direita da raiz



Passo 3. atualizar o valor de **max** da raiz:

max = $\max\{30, 30, 19\} = 30$ (sem alteração)

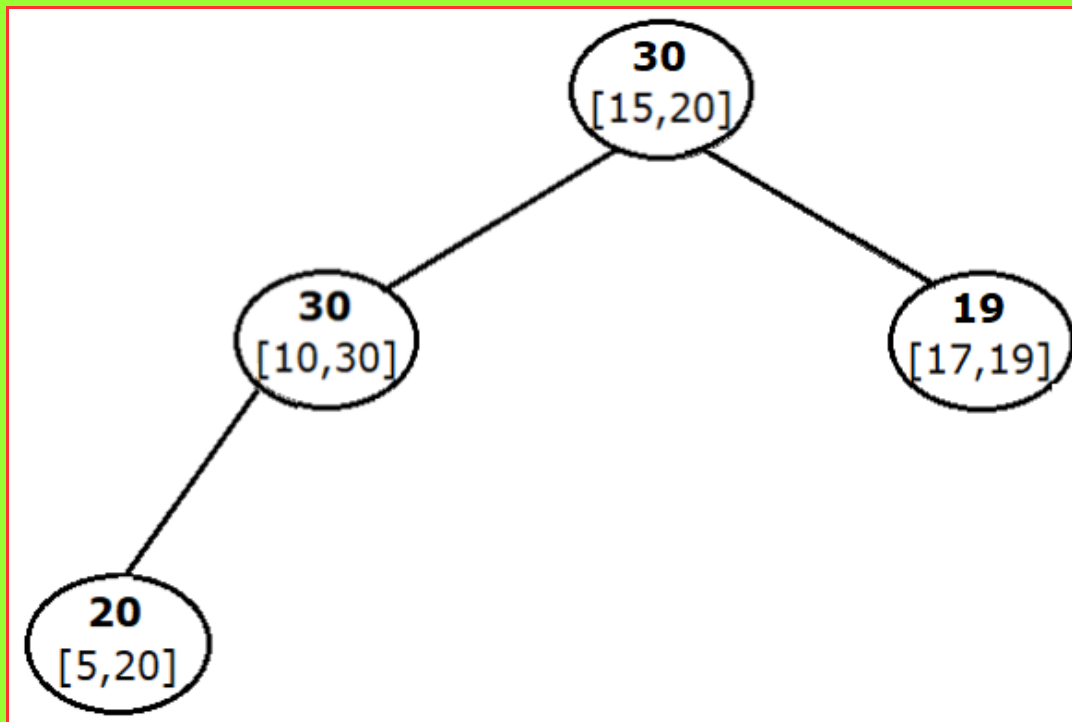
Inserir um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: inserir o intervalo $[5, 20]$ na árvore anterior

Passo 1. criar o nodo (**20**, $[5, 20]$), em que o valor **max** = sup = **20**

Passo 2. comparar o **inf** do nodo e da raiz: $5 < 15 \Rightarrow$ inserir à esquerda

Passo 2. comparar o **inf** do nodo e do filho esquerdo da raiz: $5 < 10 \Rightarrow$ inserir à esquerda



Passo 3. atualizar os valores de **max** dos antepassados do nodo inserido: sem alteração

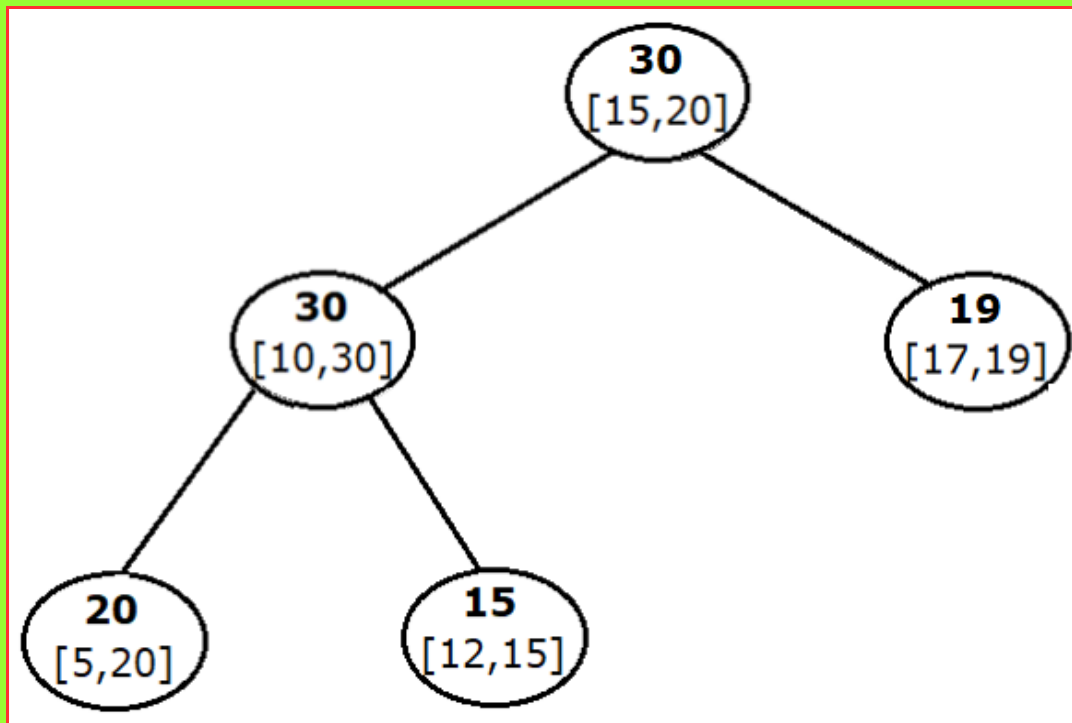
Inserir um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: inserir o intervalo $[12, 15]$ na árvore anterior

Passo 1. criar o nodo (**15**, $[12, 15]$), em que o valor **max** = sup = **15**

Passo 2. comparar o **inf** do nodo e da raiz: $12 < 15 \Rightarrow$ inserir à esquerda

Passo 2. comparar o **inf** do nodo e do filho esquerdo da raiz: $12 > 10 \Rightarrow$ inserir à direita



Passo 3. atualizar os valores de **max** dos antepassados do nodo inserido: sem alteração

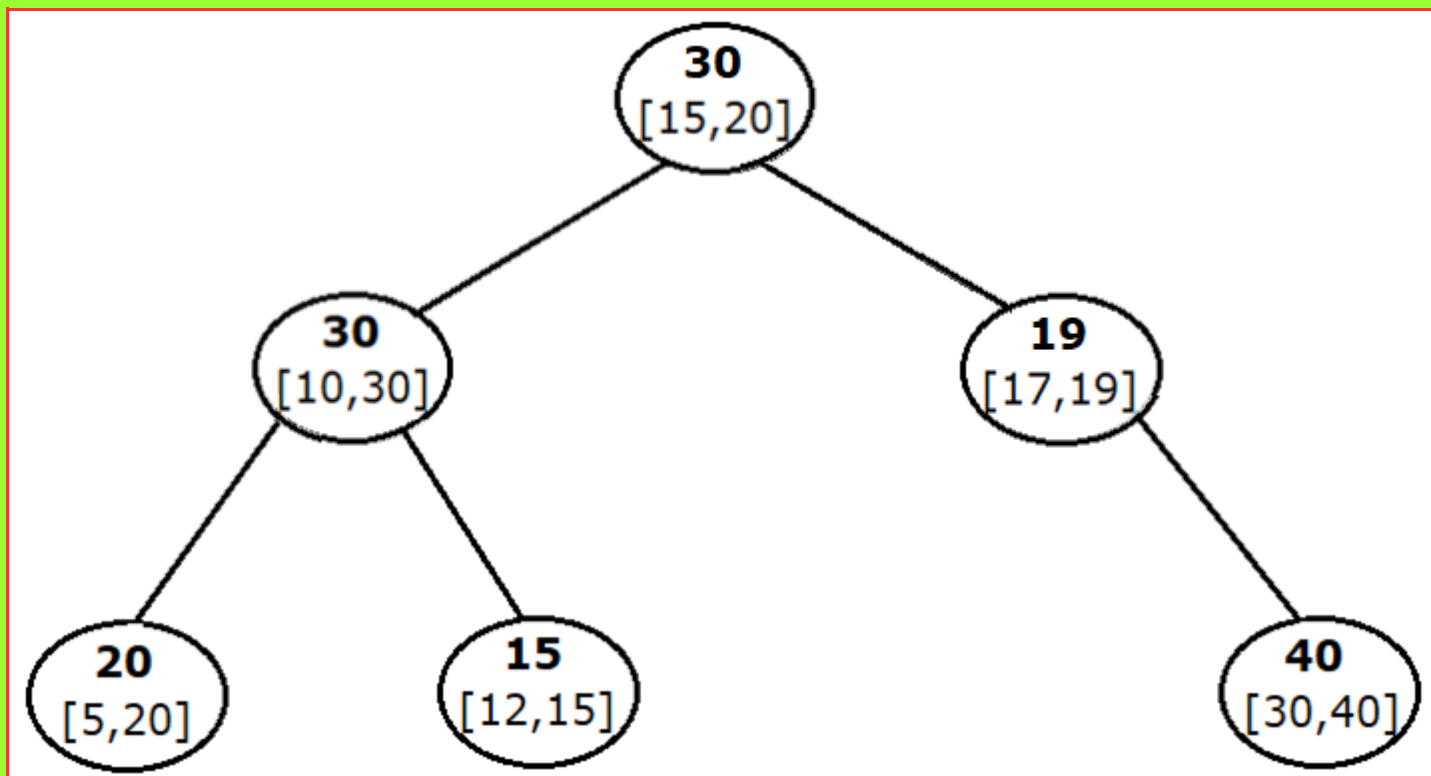
Inserir um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: inserir o intervalo $[30, 40]$ na árvore anterior

Passo 1. criar o nodo (**40**, $[30, 40]$), em que o valor **max** = sup = **40**

Passo 2. comparar o **inf** do nodo e da raiz: $30 > 15 \Rightarrow$ inserir à direita da raiz

Passo 2. comparar o **inf** do nodo e do filho esquerdo da raiz: $30 > 17 \Rightarrow$ inserir à direita

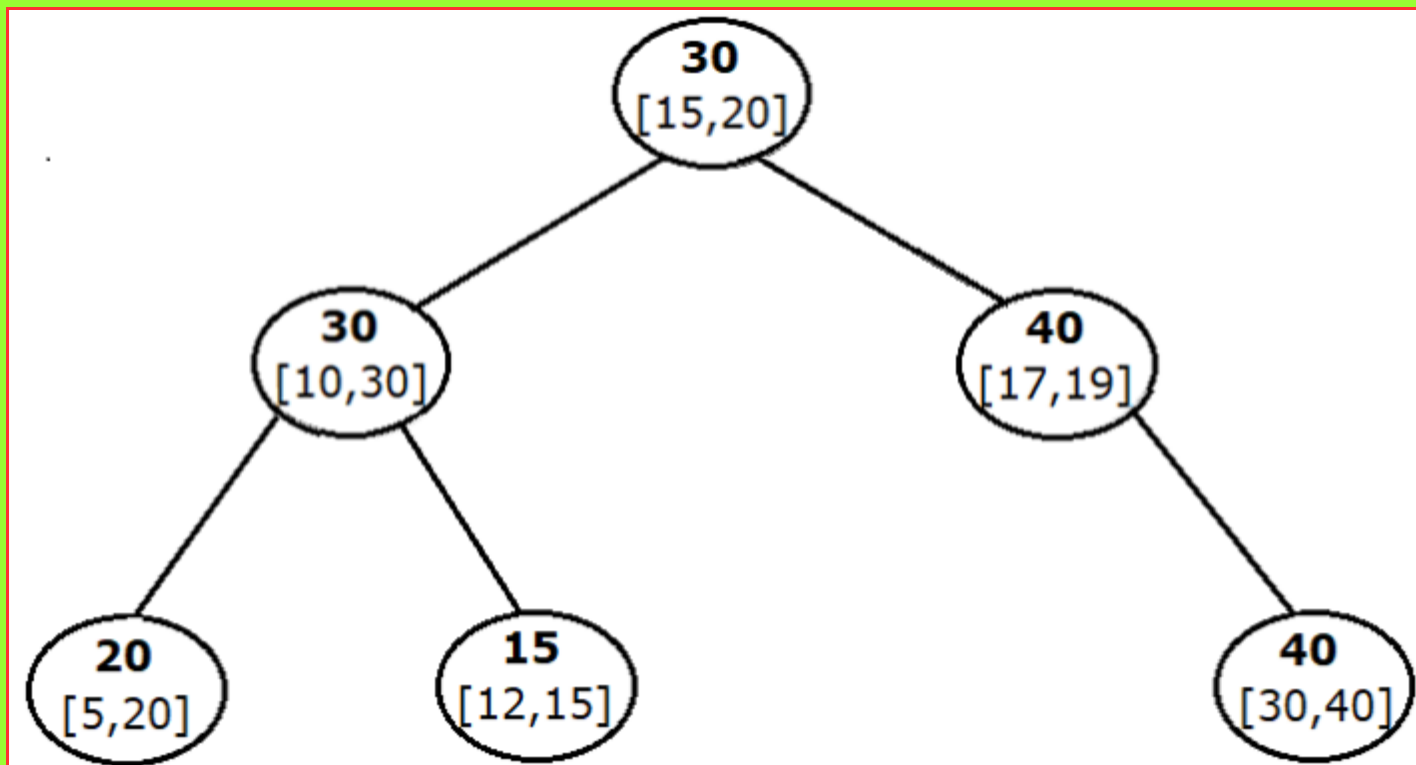


Inserir um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: inserir o intervalo [30, 40] na árvore anterior

Passo 3. atualizar os valores de **max** dos antepassados do nodo inserido:

$$\mathbf{max}([17, 19]) = \max\{19, 40\} = \mathbf{40}$$

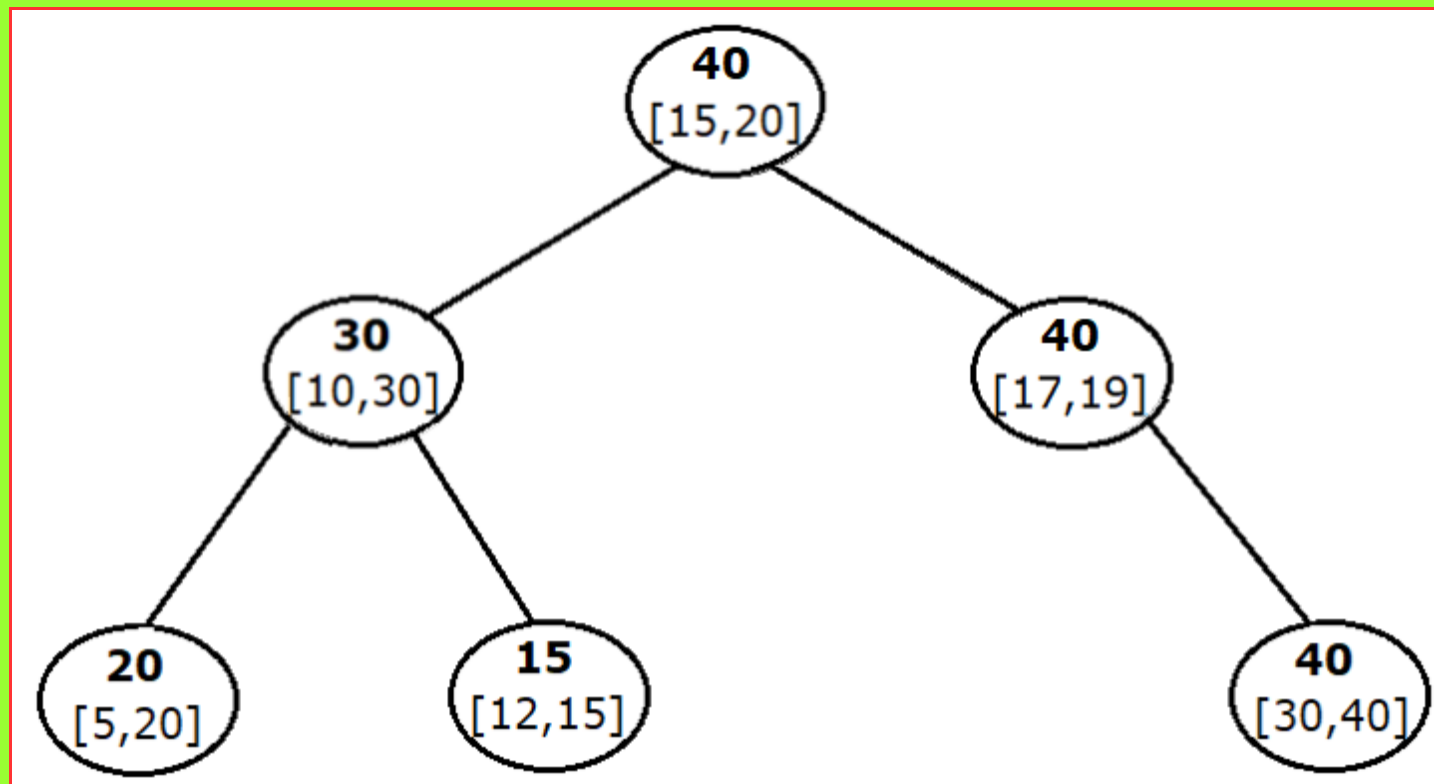


Inserir um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: inserir o intervalo [30, 40] na árvore anterior

Passo 3. atualizar os valores de **max** dos antepassados do nodo inserido:

$$\mathbf{max}([15, 20]) = \max\{30, 30, 40\} = \mathbf{40}$$



Pesquisar um intervalo numa árvore de intervalos

- É a principal operação sobre uma árvore de intervalos
- Pretende-se procurar um nodo da árvore cujo intervalo se sobrepõe ao intervalo a pesquisar
 - encontrar um nodo cujo limite inferior (inf) do seu intervalo é inferior ao limite inferior (inf) do intervalo a pesquisar

Pesquisar um intervalo numa árvore de intervalos

- Algoritmo

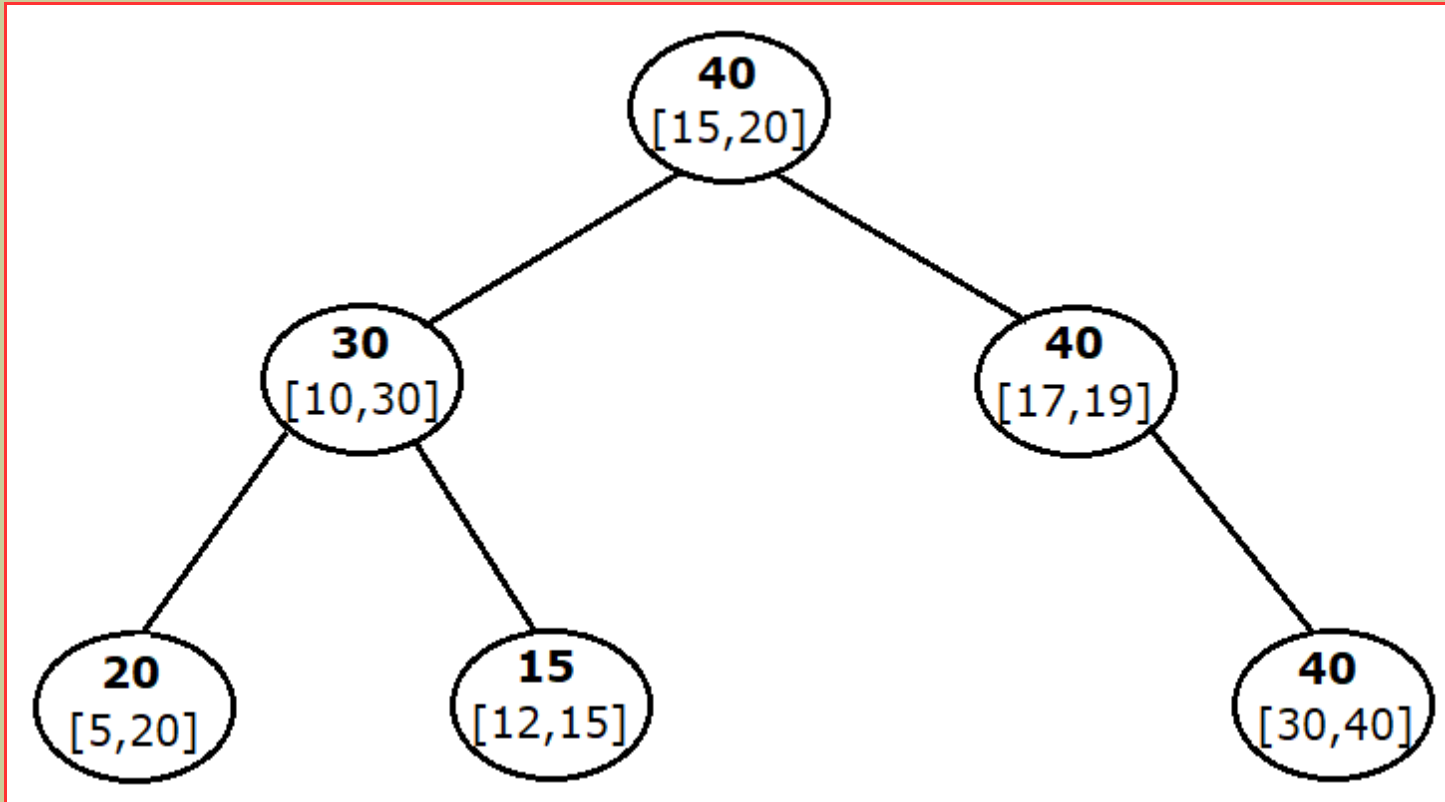
Entrada: um intervalo X e uma árvore de intervalos T

Saída: o ponteiro para um nodo de T cujo intervalo se sobrepõe ao intervalo X ou NULL

```
algoritmo pesquisaIntervalo (T, X)
  se (X sobrepõe-se ao intervalo de T) então
    devolver T (nodo cujo intervalo se sobrepõe a X)
  fim_se
  se (filho esquerdo de T  $\neq$  vazio e inf de X < max de filho esquerdo de T) então
    pesquisaIntervalo(T→Esquerda, X) (pesquisar X no filho esquerdo de T)
  senão
    pesquisaIntervalo(T→Direita, X) (pesquisar X no filho direito de T)
  fim_se
fim_algoritmo
```

Pesquisar um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: procurar o intervalo $[6, 7]$ na árvore em baixo



Pesquisar um intervalo numa árvore de intervalos

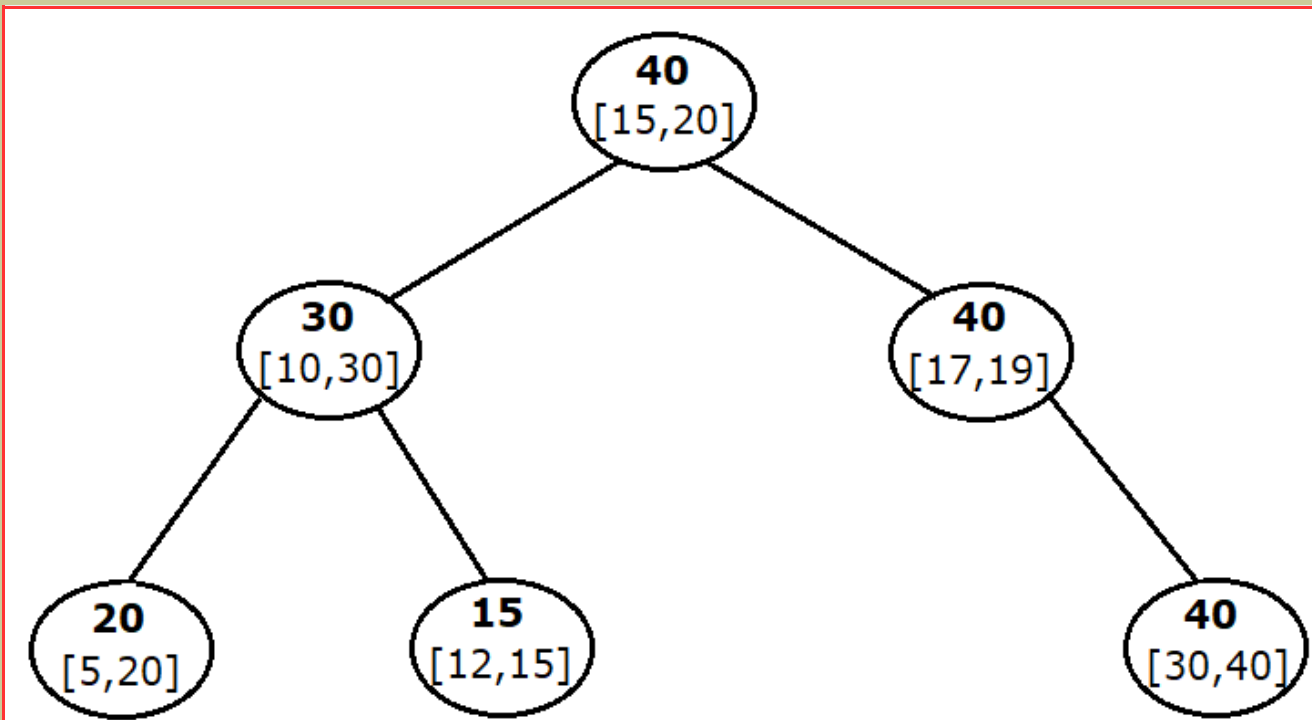
- Exemplo: procurar o intervalo $[6, 7]$ na árvore T em baixo

pesquisaIntervalo (T , $[6,7]$)

$[6,7]$ **não sobrepõe** a $[15,20]$ (intervalo de T)

filho esquerdo de T ($[10,30]$) $\neq \emptyset$ e $\text{inf}([6,7])=6 < \text{max}([10,30])=30$

pesquisaIntervalo ($T[10,30]$, $[6,7]$)



Pesquisar um intervalo numa árvore de intervalos

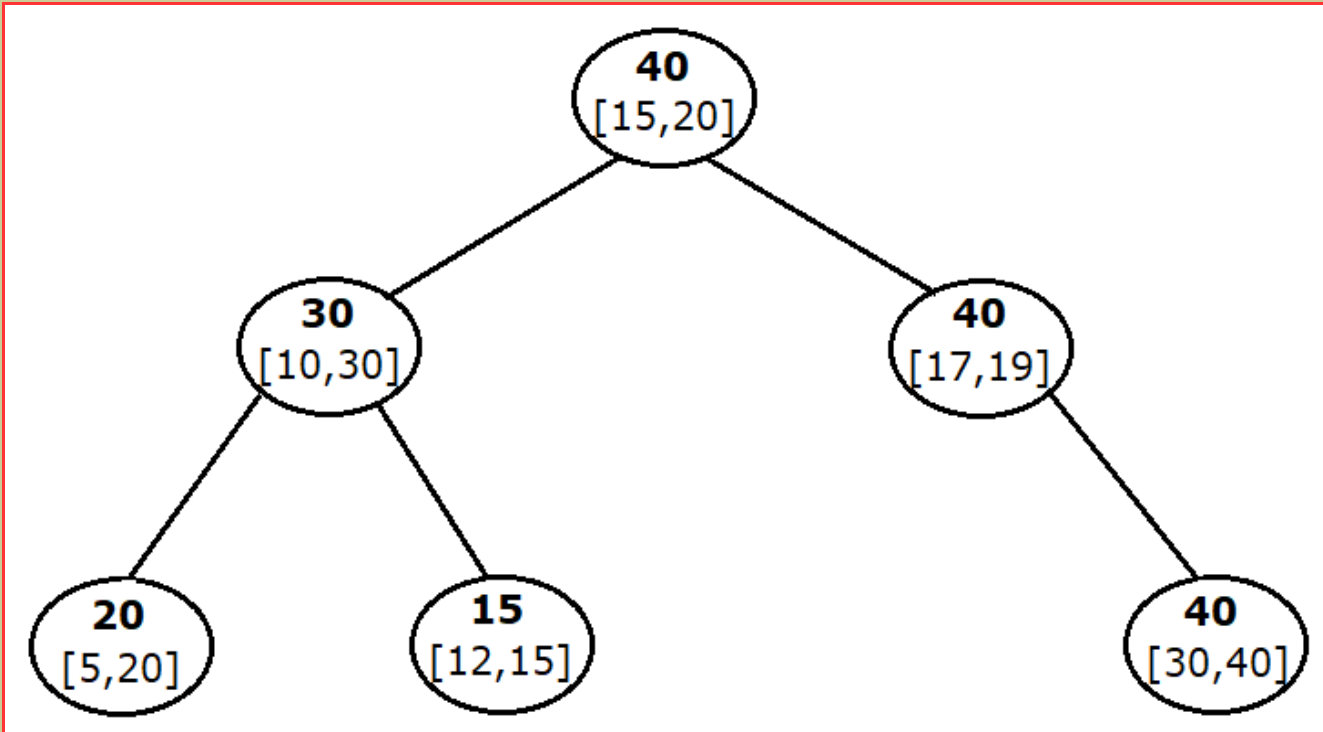
- Exemplo: procurar o intervalo $[6, 7]$ na árvore T em baixo

pesquisaIntervalo ($T[10,30]$, $[6,7]$)

$[6,7]$ **não sobrepõe** a $[10,30]$ (intervalo de $T[10,30]$)

filho esquerdo de $T[10,30]$ ($[5,20]$) $\neq \emptyset$ e $\mathbf{inf}([6,7])=6 < \mathbf{max}([5,20])=20$

pesquisaIntervalo ($T[5,20]$, $[6,7]$)



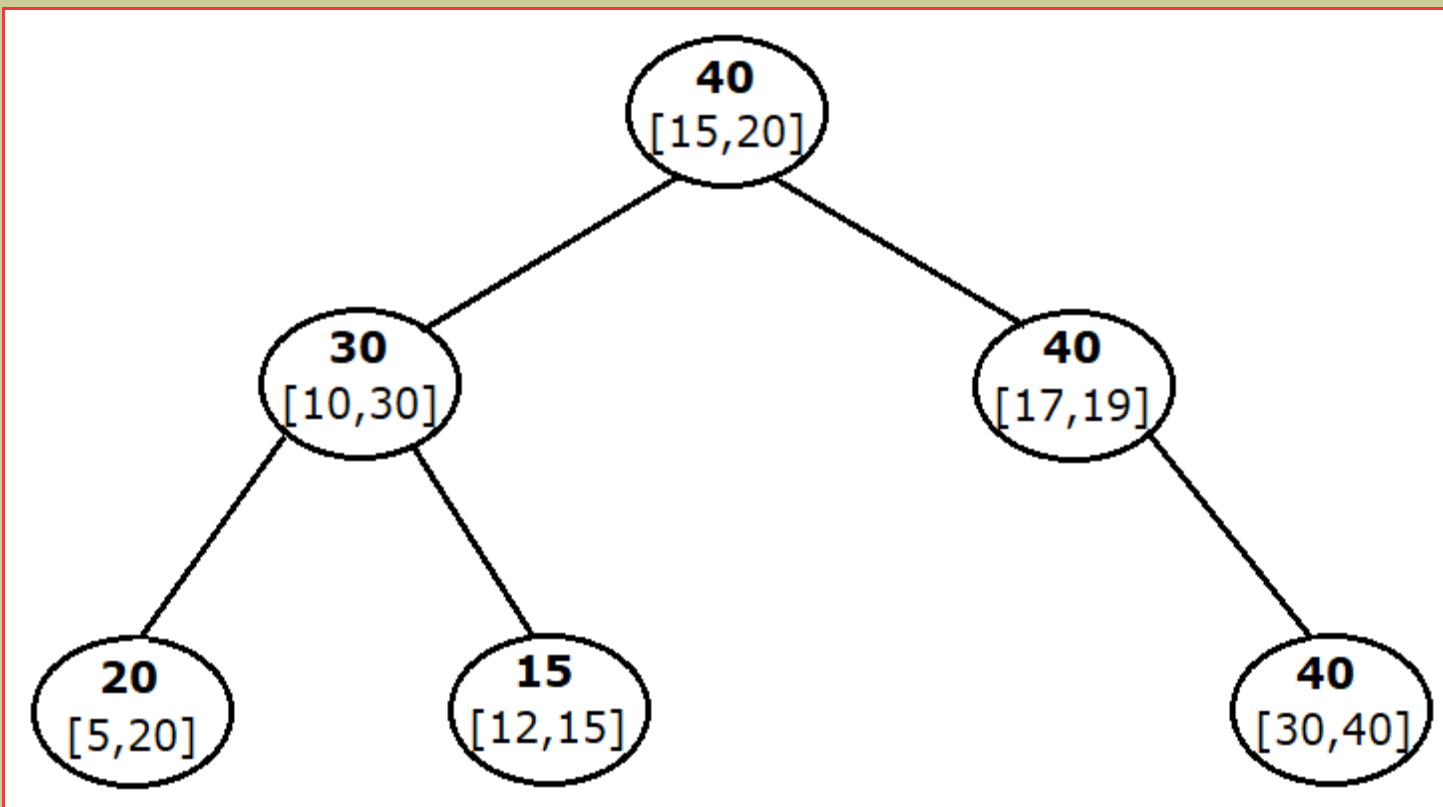
Pesquisar um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: procurar o intervalo $[6, 7]$ na árvore T em baixo

pesquisaIntervalo (T[5,20], [6,7])

$[6,7]$ **sobrepe** a $[5,20]$ (intervalo de T[5,20])

devolver $[5,20]$

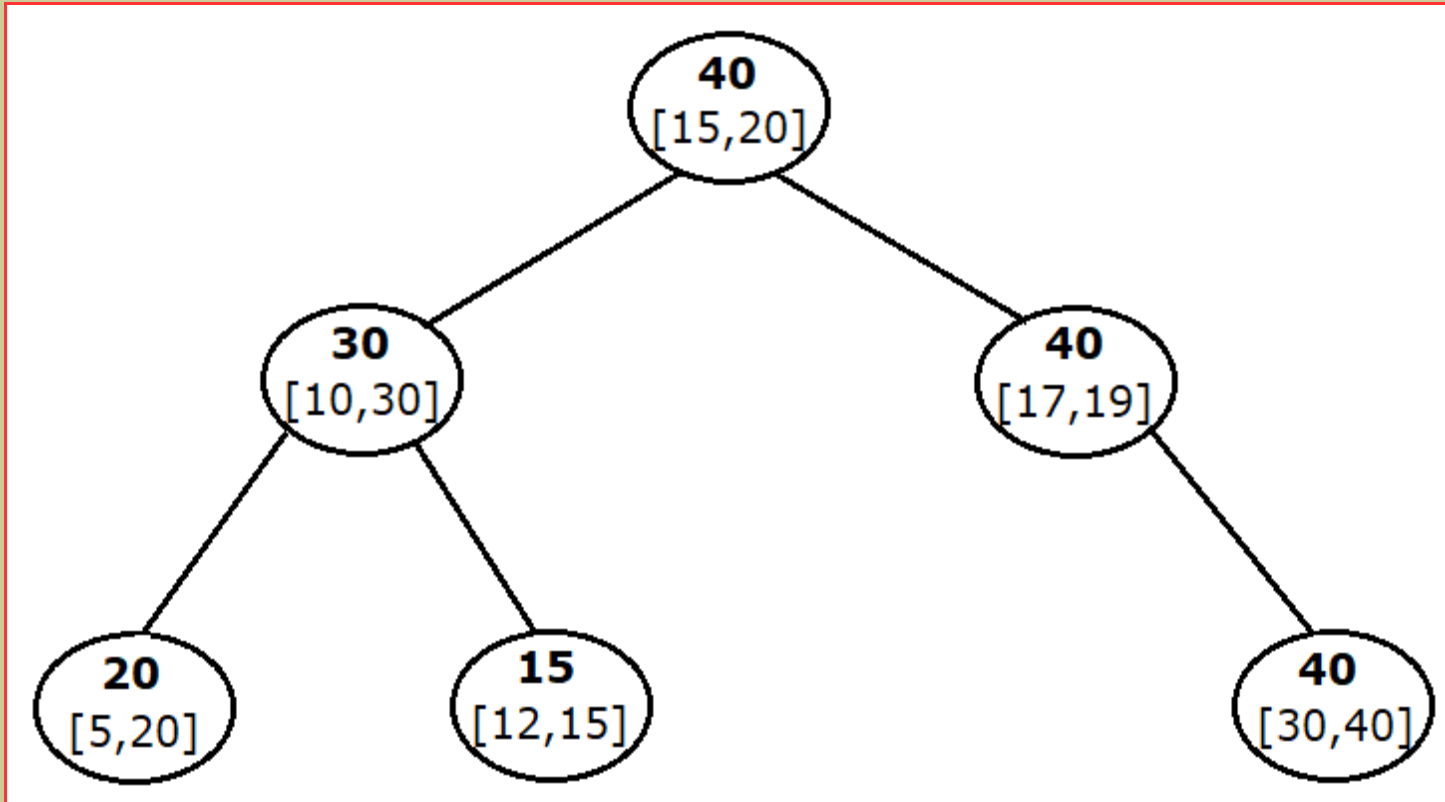


Remover um intervalo numa árvore de intervalos

- Usa o mesmo método que uma ABP usa para remover um nodo (a chave é o **inf**)
- O método é o seguinte:
 - pesquisar pelo nodo da árvore cujo intervalo se sobrepõe ao intervalo a remover (operação `pesquisarIntervalo`)
 - verificar se o nodo encontrado tem filhos:
 - se não tem filhos (é uma folha), então basta remover este nodo
 - se tem apenas o filho esquerdo, então substituir o nodo pelo filho esquerdo (ligar o pai do nodo ao filho esquerdo do nodo)
 - se tem apenas o filho direito, então substituir o nodo pelo filho direito (ligar o pai do nodo ao filho direito do nodo)
 - se tem dois filhos, então substituir o nodo pelo descendente
 - mais à direita do seu filho esquerdo, ou
 - mais à esquerda do seu filho direito
 - atualizar os valores de **max** dos nodos antecessores do nodo removido

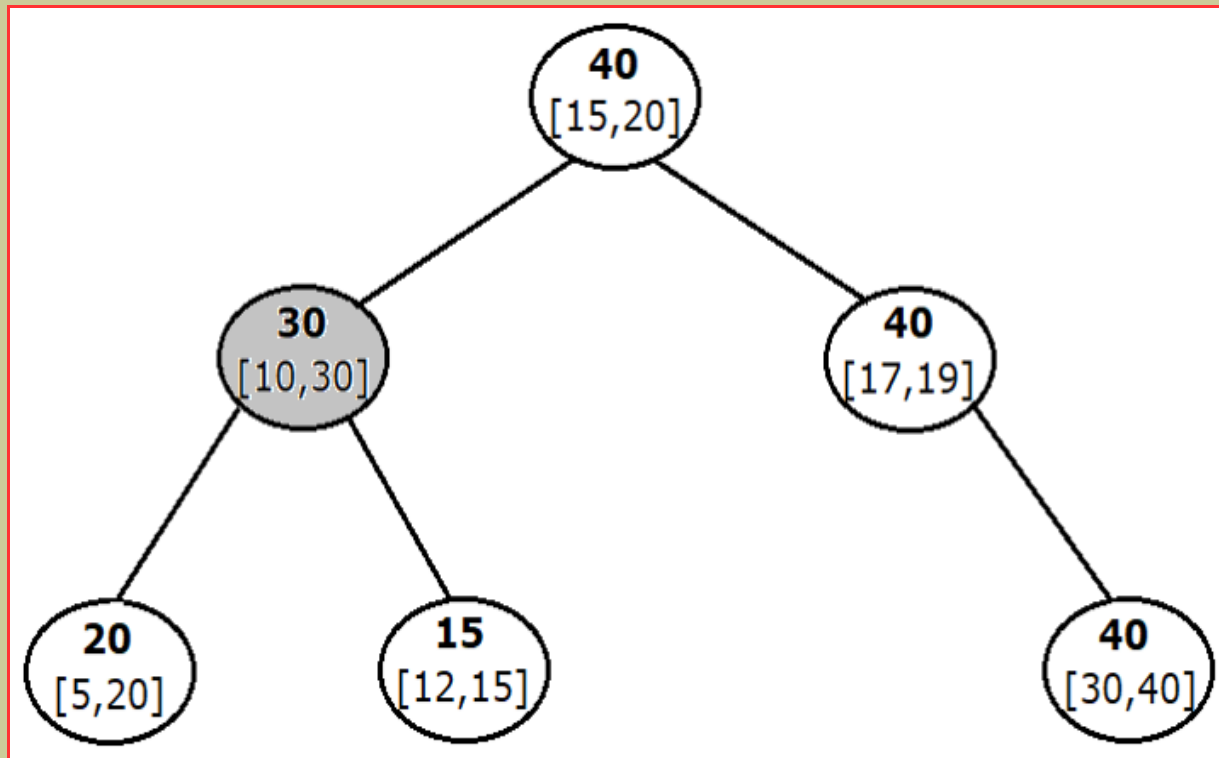
Remover um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: remover o nodo cujo intervalo intercepta com $[9, 11]$ na árvore em baixo



Remover um intervalo numa árvore de intervalos

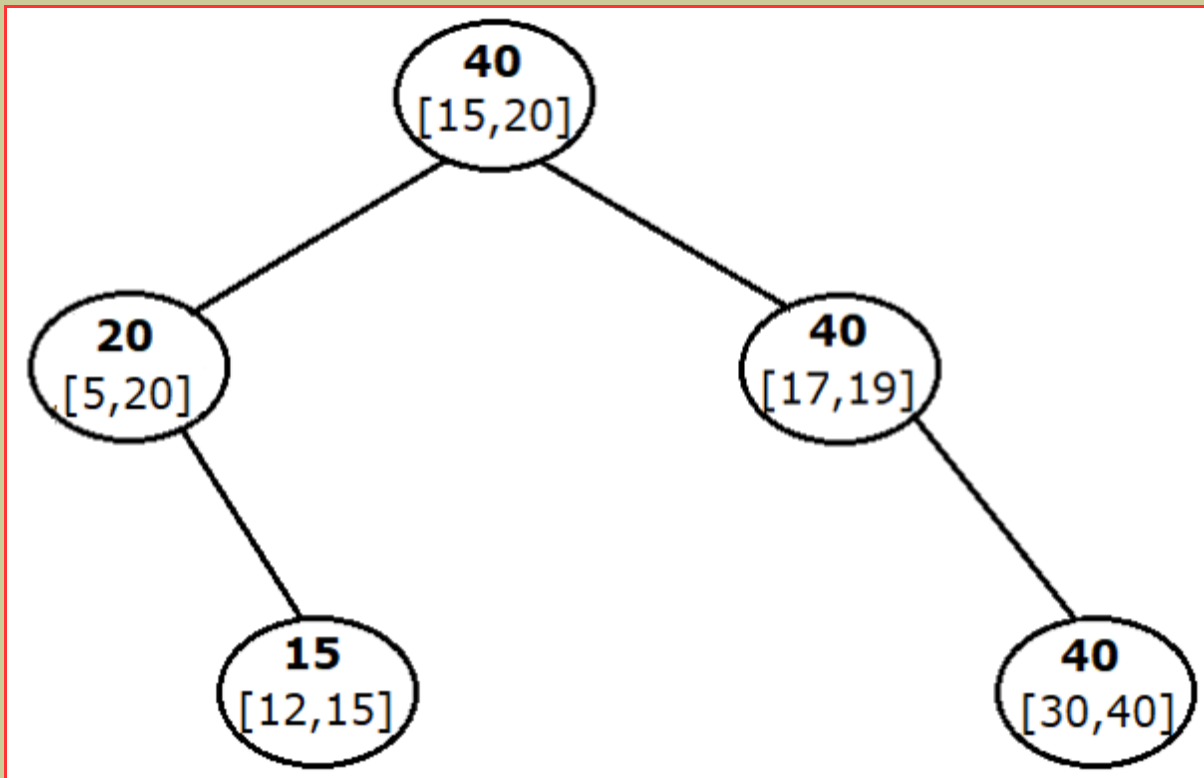
- Exemplo: remover o nodo cujo intervalo intercepta com $[9, 11]$ na árvore
 - pesquisar pelo nodo da árvore cujo intervalo se sobrepõe ao intervalo a remover: $T[10,30]$



- o nodo encontrado tem dois filhos, então substituir o nodo pelo descendente
 - mais à direita do seu filho esquerdo (subárvore), ou
 - mais à esquerda do seu filho direito (subárvpre)

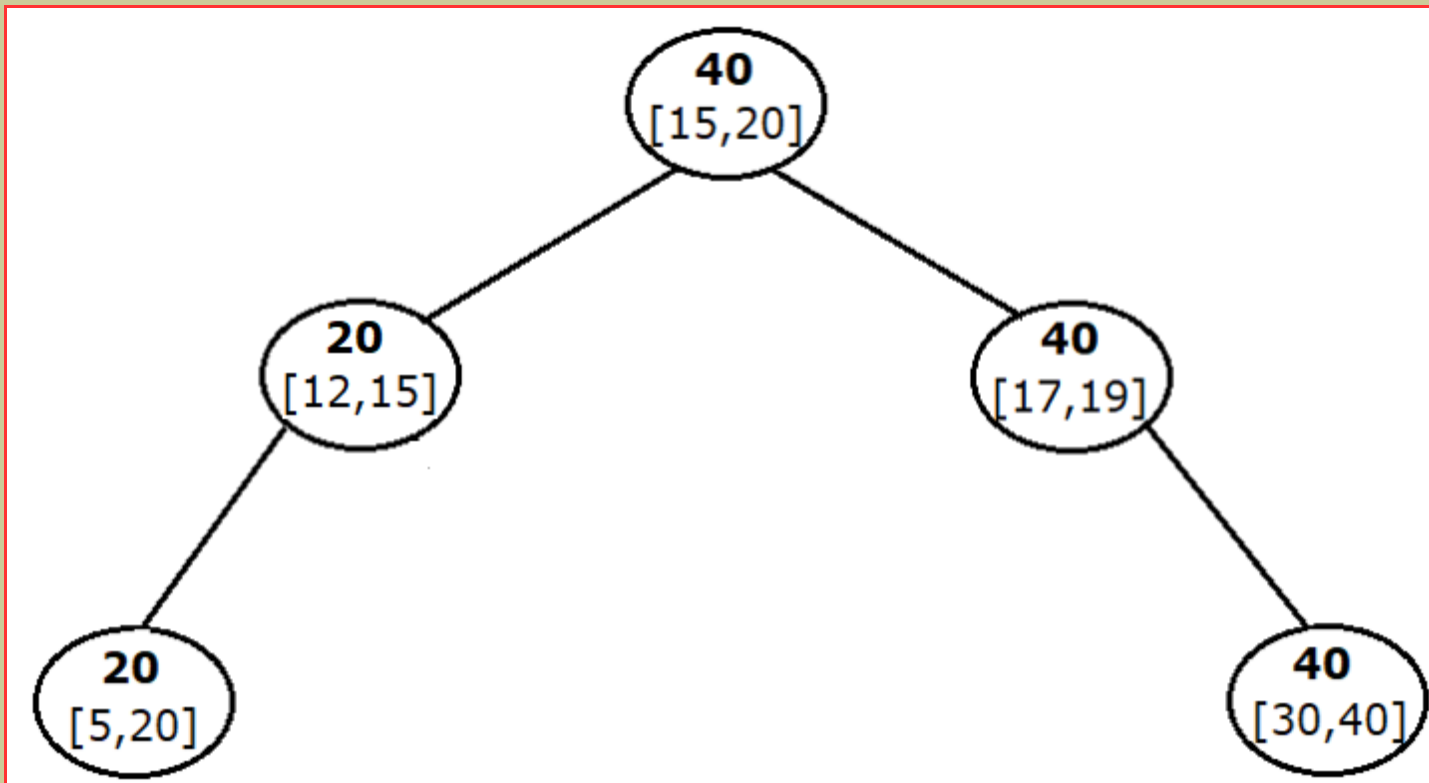
Remover um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: remover o nodo cujo intervalo intercepta com $[9, 11]$ na árvore
 - substituir o nodo pelo descendente mais à direita do seu filho esquerdo
 - atualizar os nodos antecessores: sem alteração



Remover um intervalo numa árvore de intervalos

- Exemplo: remover o nodo cujo intervalo intercepta com $[9, 11]$ na árvore
 - substituir o nodo pelo descendente mais à esquerda do seu filho direito
 - atualizar os nodos antecessores: $\mathbf{max}(T[12,15]) = \max\{20, 15\} = \mathbf{20}$



Estrutura de dados aumentadas

Introdução

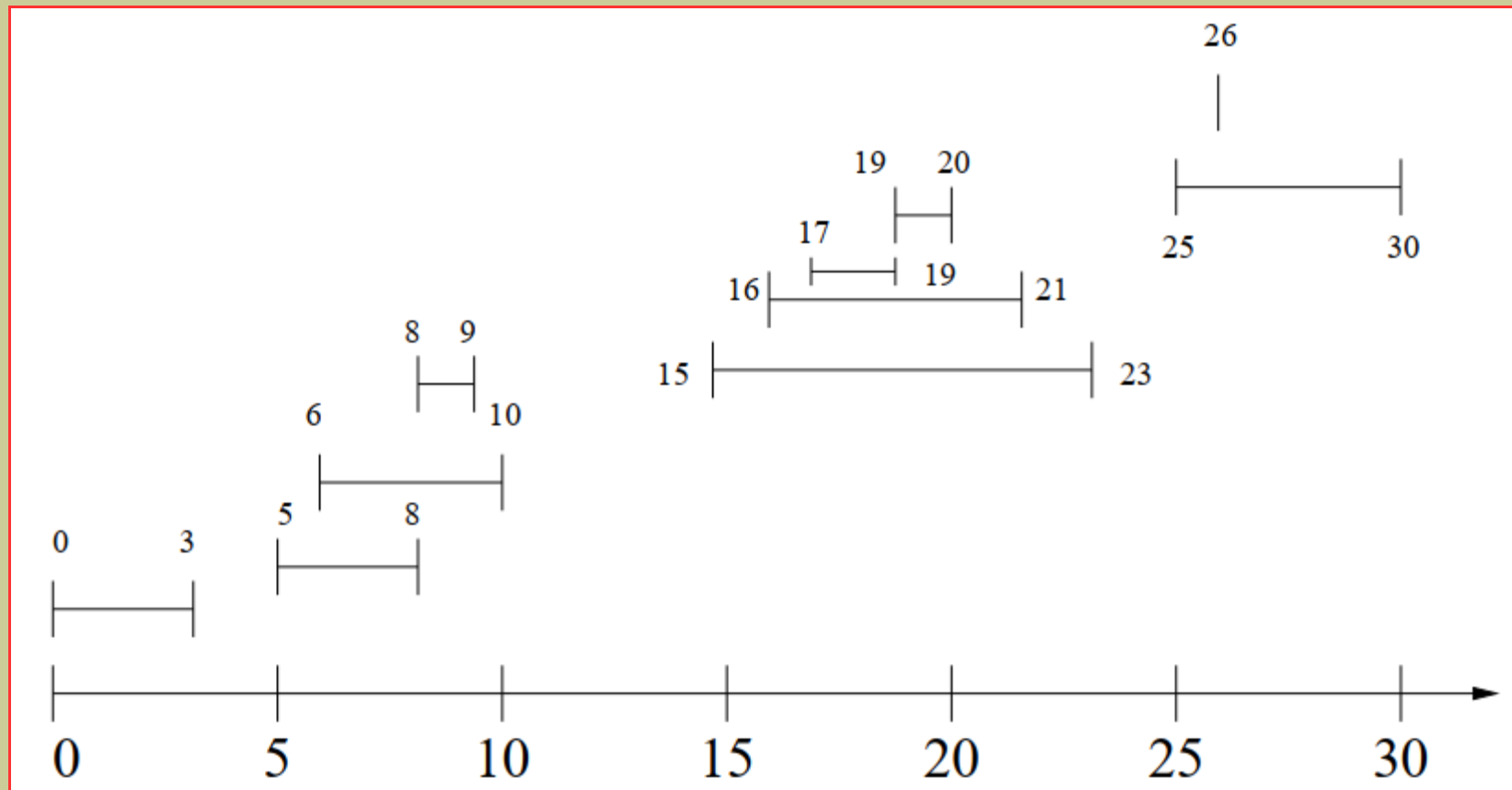
- Dependendo do problema específico a ser resolvido, pode-se obter uma solução mais eficiente e elegante ao optar-se por aumentar uma estrutura já existente, em vez de simplesmente usar uma estrutura já conhecida ou partir-se para a criação de uma totalmente nova
- Os campos a serem acrescentados à estrutura devem ser tais que as suas atualizações sejam bastante eficientes
- Os algoritmos que manipulam a estrutura original, devem agora ser adaptados para terem em consideração a atualização dos novos campos
- Geralmente, os novos campos levam à criação de novos algoritmos que estendam o comportamento da estrutura original para a solução do problema específico

Passos envolvidos para aumentar uma estrutura de dados

- Escolha da estrutura de dados subjacente
- Determinar informação adicional a ser mantida
- Verificar se manutenção da informação adicional pode ser feita pelas operações de modificação da estrutura de dados
- Desenvolver novas operações

Exemplo

- Aumentar uma árvore preto-vermelho para manipular conjunto de intervalos
- Dado um conjunto de intervalos (em baixo) definir uma representação em forma de árvore



Exemplo

- Aumentar uma árvore preto-vermelho para manipular conjunto de intervalos
 - Dado um conjunto de intervalos, definir uma representação em forma de árvore

