# Lógica Computacional

## Aula Teórica 8: Forma Normal Conjuntiva

António Ravara    Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

# Como determinar “eficazmente” a validade de uma fórmula?

## Objectivo

Determinar a validade de raciocínios (ou de fórmulas) semânticamente, mas de forma eficaz e automática.

## Meio: algoritmo

Define-se uma função que recebe uma fórmula e devolve a sua natureza (possível, contraditória ou válida).

## Abordagens computacionais

Há vários algoritmos, de acordo com formas especiais em que as fórmulas podem estar. Uns são mais eficazes que outros. Vamos ver 3, por ordem crescente de eficácia.

# Definições e resultados

## Definição 8.1: literal

Um *literal* é uma fórmula atómica (diz-se positivo) ou a negação de uma fórmula atómica (diz-se negativo).

## Lema 8.1: validade duma disjunção de literais

Uma disjunção de literais $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$, com $n \geq 1$ é valida se, e só se, existirem $1 \leq i, j \leq n$ tal que $L_i = \top$ ou $L_i = \neg L_j$.

## Prova

Há dois casos para considerar:

1. algum literal é $\top$ (em que $\top \stackrel{\text{abv}}{=} \neg\bot$), ou
2. a disjunção contém um literal e a sua negação.

Note-se que tem que se provar o sentido "só se" e o sentido "se".

# Satisfação de disjunções de literais

## Lema 8.1: validade duma disjunção de literais

Uma disjunção de literais $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$, com $n \geq 1$ é valida se, e só se, existirem $1 \leq i, j \leq n$ tal que $L_i = \top$ ou $L_i = \neg L_j$.

## Prova do sentido "só se"

No primeiro caso, como $\top$ é o elemento absorvente da disjunção, ela é válida (sabendo também que a disjunção é associativa e comutativa, e que a equivalência lógica é uma congruência, aplicam-se repetidamente as leis até se obter apenas $\top$).

O segundo caso reduz-se ao primeiro porque $L \vee \neg L \equiv \top$.

## Lema 8.1: validade duma disjunção de literais

Uma disjunção de literais $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$, com $n \geq 1$ é valida se, e só se, existirem $1 \leq i, j \leq n$ tal que $L_i = \top$ ou $L_i = \neg L_j$.

## Prova do sentido "se"

Prova-se por contra-recíproco.

Assume-se que a disjunção não contém $\top$ nem um literal e a sua negação. Quer-se então provar que não é válida.

Considerando a valoração $V$ que atribui 0 a todos os símbolos proposicionais na disjunção que ocorrem como literais e 1 a todos os símbolos proposicionais na disjunção que ocorrem negados. Então $V$ não satisfaz a disjunção, que não é então válida.

# Um resultado simples

### Lema 8.2: negação de literais

Dado um literal $L$ existe um outro literal $L'$ tal que $\neg L \equiv L'$

### Prova

Por definição, um literal é uma fórmula atómica (símbolo proposicional ou $\perp$) — um literal positivo — ou a sua negação — um literal negativo.

Consideram-se então os dois casos:

1. se $L$ é positivo, então $\neg L$ é negativo e toma-se $L' = \neg L$ (claro que $= \subseteq \equiv$);
2. se $L$ é negativo, então $L = \neg L''$, para algum literal positivo $L'$, e logo $\neg L = \neg\neg L'' \equiv L'$

## Definição 8.2: Forma Normal Conjuntiva

Uma fórmula $\varphi \in F_P$ está na Forma Normal Conjuntiva ou FNC (e escreve-se FNC($\varphi$)), se é uma conjunção de disjunções de literais.

## Satisfação

Uma fórmula $\varphi \in F_P$ tal que FNC($\varphi$) é:

- válida, se são válidas todas as disjunções;
- contraditória, se é contraditória alguma das disjunções;
- possível, quando nenhum dos casos anteriores se verifica.

## Definição 8.3: Forma Normal Disjuntiva

Uma fórmula $\varphi \in F_P$ está na Forma Normal Disjuntiva ou FND (e escreve-se FND($\varphi$)), se é uma disjunção de conjunções de literais.

## Formas gerais

Note-se que para naturais $n, m \geq 1$, se dada fórmula $\varphi \in F_P$ é tal que:

- FNC($\varphi$), então $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee_{j=1}^{m} L_{i,j})$
- FND($\varphi$), então $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{i,j})$

Considera-se a disjunção e a conjunção unárias como um abuso de notação: denotam apenas a fórmula argumento.

## Observações

- Pode-se transformar uma forma normal conjuntiva em disjuntiva, e vice-versa.
- Há mais do que uma forma de o fazer

## Proposição 8.1: relação entre FNC e FND

Sejam $\varphi_1, \psi_1 \in F_P$ tal que FNC($\varphi_1$) e FND($\psi_1$). Então existem $\varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3 \in F_P$ tal que:

- $\varphi_2 \equiv \neg\varphi_1$ e FND($\varphi_2$), e $\psi_2 \equiv \neg\psi_1$ e FNC($\psi_2$).
- $\varphi_3 \equiv \varphi_1$ e FND($\varphi_3$), e $\psi_3 \equiv \psi_1$ e FNC($\psi_3$).

## Proposição 8.1: relação entre FNC e FND

Sejam $\varphi_1, \psi_1 \in F_P$ com FNC($\varphi_1$) e FND($\psi_1$). Existem $\varphi_2, \psi_2 \in F_P$ tal que $\varphi_2 \equiv \neg\varphi_1$ e $\psi_2 \equiv \neg\psi_1$, com FND($\varphi_2$) e FNC($\psi_2$).

Prova axiomatica é simples: basta usar as leis de De Morgan

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\varphi_1 & = & \neg \bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee_{j=1}^{m} L_{i,j}) \\
 & \equiv & \bigvee_{i=1}^{n} \neg(\bigvee_{j=1}^{m} L_{i,j}) \\
 & \equiv & \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m} \neg L_{i,j}) \\
 & \equiv & \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m} L'_{i,j}) \\
 & = & \varphi_2
\end{array}
$$

pois para cada $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ encontra-se, pelo lema anterior, um literal $L'_{i,j}$ tal que $\neg L_{i,j} \equiv L'_{i,j}$. Note-se que FND($\varphi_2$).

Para o caso de $\psi_2$ a prova é semelhante.

### Proposição 8.1: relação entre FNC e FND

Sejam $\varphi_1, \psi_1 \in F_P$ tal que FNC($\varphi_1$) e FND($\psi_1$). Então existem $\varphi_2, \psi_2 \in F_P$ tal que $\varphi_2 \equiv \varphi_1$ e FND($\varphi_2$), e $\psi_2 \equiv \psi_1$ e FNC($\psi_2$).

### Prova

Simples: basta usar as leis de distribuição da conjunção sobre a disjunção (e vice-versa).

# Qualquer fórmula tem uma forma normal equivalente

## Lema das Formas Normais

Para qualquer fórmula $\varphi \in F_P$ existem fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \in F_P$ tal que $\varphi \equiv \varphi_1$ e FNC($\varphi_1$), e $\varphi \equiv \varphi_2$ e FND($\varphi_2$).

## Prova

Mostra-se por indução estrutural que para qualquer fórmula $\varphi \in F_P$ existe uma fórmula $\psi \in F_P$ tal que $\varphi \equiv \psi$ e FNC($\psi$). A outra afirmação tem prova semelhante.

Casos base: como símbolos proposicionais e $\perp$ são literais, já estão na FNC.

Passo. Analisa-se por casos a forma de $\varphi$.
Se $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 \wedge \varphi_2$, por hipótese de indução existem $\psi_1, \psi_2 \in F_P$ tal que $\varphi_1 \equiv \psi_1$ e FNC($\psi_1$), e $\varphi_2 \equiv \psi_2$ e FNC($\psi_2$). Logo, $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ e FNC($\psi_1 \wedge \psi_2$) por definição.

# Qualquer fórmula tem uma forma normal equivalente

## Lema 8.3: Lema das Formas Normais

Para qualquer fórmula $\varphi \in F_P$ existe uma fórmula $\psi \in F_P$ tal que $\varphi \equiv \psi$ e FNC($\psi$).

## Continuação da prova: caso $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 \vee \varphi_2$

Por hipótese de indução existem $\psi_1, \psi_2 \in F_P$ tal que $\varphi_1 \equiv \psi_1$ e FNC($\psi_1$), e $\varphi_2 \equiv \psi_2$ e FNC($\psi_2$), logo, $\varphi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$. Mostra-se que existe $\psi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$ tal que FNC($\psi$) e logo $\varphi \equiv \psi$.

Como para naturais $n, m > 1$ se tem que $\psi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i$ e $\psi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{j=1}^{m} \gamma'_j$, sendo os $\gamma$s disjunções de literais, tem-se também, pelas leis de distribuição da disjunção sobre a conjunção, que

$$\psi_1 \vee \psi_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i) \vee (\bigwedge_{j=1}^{m} \gamma'_j) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m}(\gamma_i \vee \gamma'_j)) \stackrel{\text{def}}{=} \psi$$

# Qualquer fórmula tem uma forma normal equivalente

**Lema das Formas Normais**

Para qualquer fórmula $\varphi \in F_P$ existe uma fórmula $\psi \in F_P$ tal que $\varphi \equiv \psi$ e FNC($\psi$).

**Continuação da prova: caso $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$**

Por hipótese de indução existem $\psi_1, \psi_2 \in F_P$ tal que $\varphi_1 \equiv \psi_1$ e FNC($\psi_1$), e $\varphi_2 \equiv \psi_2$ e FNC($\psi_2$), logo, $\varphi \equiv \psi_1 \rightarrow \psi_2$. Tem-se também que $\psi_1 \rightarrow \psi_2 \equiv \neg\psi_1 \vee \psi_2$ e como se tem que FNC($\psi_1$), então pela proposição anterior existe $\psi_1' \equiv \neg\psi_1$ tal que FND($\psi_1'$). Igualmente, existe $\psi_2' \equiv \psi_2$ tal que FND($\psi_2'$). Logo, $\varphi \equiv \psi_1' \vee \psi_2'$ e FND($\psi_1' \vee \psi_2$). Fazendo de novo a distribuição das disjunções sobre as conjunções obtém-se $\varphi'$ tal que $\varphi \equiv \varphi'$ e FNC($\varphi'$).