Lógica Computacional

Aula Teórica 7: Semântica da Lógica Proposicional

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

A ideia

Todas as fórmulas são diferentes?

- Há fórmulas sintaticamente diferentes que significam a mesma coisa (capturam a mesma asserção).
- Exemplo: "gosto de lógica" é equivalente a "não é verdade que não gosto de lógica".
- Sintaxe não é tudo: há várias formas de dizer a mesma coisa.
- Intuitivamente, se dada valoração arbitrária satisfaz uma fórmula se e só se satisfaz outra fórmula, então as fórmulas são equivalentes.

A noção de equivalência

Definição 7.1: equivalência lógica

Duas fórmulas $\varphi, \psi \in F_P$ dizem-se *logicamente equivalentes*, o que se denota por $\varphi \equiv \psi$, se para qualquer valoração V se tem que $V(\varphi) = V(\psi)$.

Proposição 7.4

Duas fórmulas $\varphi, \psi \in F_P$ dizem-se *logicamente equivalentes*, o que se denota por $\varphi \equiv \psi$, se se tem que $\varphi \models \psi$ se e só se $\psi \models \varphi$.

Teorema 7.3

A equivalência lógica é uma relação de equivalência.

A equivalência lógica é uma relação de equivalência

Prova

Tem que se mostrar que é reflexiva, simétrica e transitiva.

- Note-se que sai como corolário da Proposição 7.4 que $\equiv \subseteq \models$ Como já mostrámos que $\models$ é uma pré-ordem, $\equiv$ também o é. Logo, é reflexiva e transitiva.
- Falta provar que é simétrica . Note-se que a simetria sai pela Proposição 7.4.

A consequência semântica é uma ordem parcial

- Um pré-ordem anti-simétrica diz-se uma ordem parcial .
- A anti-simetria usa a igualdade (sintática); se se considerar em vez a igualdade semântica (equivalência lógica), tem-se uma "anti-simetria" semântica.

Teorema 7.4

Mostrou-se que a consequência semântica é uma pré-ordem.

Pela Proposição 7.4, se $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$ então $\varphi \equiv \psi$; logo, a consequência semântica é anti-simétrica.

Axiomas importantes

Proposição 7.5: algumas leis da lógica proposicional

- Dupla negação: $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
- Absurdo: $\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \bot$
- Universal: $\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top$
- Leis de De Morgan:
  $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ e $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
- Distributividade:
  - $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \delta) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \delta)$
  - $\varphi \vee (\psi \wedge \delta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \delta)$
  - $(\varphi \wedge \psi) \vee \delta \equiv (\varphi \vee \delta) \wedge (\psi \vee \delta)$
  - $\varphi \wedge (\psi \vee \delta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \delta)$
  - $(\varphi \vee \psi) \wedge \delta \equiv (\varphi \wedge \delta) \vee (\psi \wedge \delta)$

Axiomas importantes

Proposição 7.5: algumas leis da lógica proposicional

- Monoides comutativos:
  - $(F_P, \vee, \bot)$, sendo $\top$ o elemento absorvente.
  - $(F_P, \wedge, \top)$, sendo $\bot$ o elemento absorvente.
- Idempotência: $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$ e $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$
- Transitividade da implicação: $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \gamma) \equiv \varphi \to \gamma$
- Contra-recíproco: $\varphi \equiv \psi$ se e só se $\neg\psi \equiv \neg\varphi$

Um monoide é um conjunto equipado com uma operação associativa com elemento neutro.

Provas

A maioria das leis resultam de leis semelhantes da álgebra de Boole.

- $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

$$V(\neg\neg\varphi) = \ominus V(\neg\varphi) = \ominus \ominus V(\varphi) = V(\varphi)$$

- $\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \bot$

$$V(\varphi \wedge \neg\varphi) = V(\varphi) \otimes V(\neg\varphi) = V(\varphi) \otimes \ominus V(\varphi) = 0 = V(\bot)$$

- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

$$\begin{aligned} V(\neg(\varphi \wedge \psi)) &= \ominus V(\varphi \wedge \psi) \\ &= \ominus(V(\varphi) \otimes V(\psi)) \\ &= \ominus V(\varphi) \oplus \ominus V(\psi) \\ &= V(\neg\varphi) \oplus V(\neg\psi) \\ &= V(\neg\varphi \vee \neg\psi) \end{aligned}$$

Lei do contra-recíproco: $\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$

$$
\begin{aligned}
V(\varphi \to \psi) &= \ominus V(\varphi) \oplus V(\psi) \\
&= V(\psi) \oplus \ominus V(\varphi) \\
&= \ominus \ominus V(\psi) \oplus \ominus V(\varphi) \\
&= \ominus V(\neg\psi) \oplus V(\neg\varphi) \\
&= V(\neg\psi \to \neg\varphi)
\end{aligned}
$$

$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \delta) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \delta)$

$$\begin{aligned}
V(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \delta)) &= \\
\ominus V(\varphi) \oplus V(\psi \rightarrow \delta) &= \\
\ominus V(\varphi) \oplus (\ominus V(\psi) \oplus V(\delta)) &= \\
1 \otimes (\ominus V(\varphi) \oplus (\ominus V(\psi) \oplus V(\delta))) &= \\
(1 \oplus V(\delta)) \otimes (\ominus V(\varphi) \oplus (\ominus V(\psi) \oplus V(\delta))) &= \\
((V(\varphi) \oplus \ominus V(\varphi)) \oplus V(\delta)) \otimes (\ominus V(\varphi) \oplus (\ominus V(\psi) \oplus V(\delta))) &= \\
(V(\varphi) \oplus (\ominus V(\varphi) \oplus V(\delta))) \otimes (\ominus V(\psi) \oplus (\ominus V(\varphi) \oplus V(\delta))) &= \\
(V(\varphi) \otimes \ominus V(\psi)) \oplus (\ominus V(\varphi) \oplus V(\delta))) &= \\
(\ominus \ominus V(\varphi) \otimes \ominus V(\psi)) \oplus (\ominus V(\varphi) \oplus V(\delta))) &= \\
\ominus(\ominus V(\varphi) \oplus V(\psi)) \oplus (\ominus V(\varphi) \oplus V(\delta))) &= \\
\ominus(\varphi \rightarrow \psi) \oplus (\varphi \rightarrow \delta) &= \\
(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \delta)
\end{aligned}$$

"Iguais por iguais"

Intuição

- Um mecanismo fundamental do raciocínio lógico (ou mesmo algébrico) é o de substituir "iguais por iguais".
- Exemplos:
  - como $1+1=2$, então $1+1+1=3$ é equivalente a $2+1=3$;
  - se para $p, q, r \in P$ se tem que $V(p) = V(q)$, então $p \vee r \equiv q \vee r$.
- Como usar este facto intuitivo na lógica?

Teorema da Substitutividade

Suponha-se que $\varphi \equiv \psi$, assuma-se que γ é uma fórmula que contém φ como subfórmula e que γ' é obtido de γ substituindo ocorrrências de φ por ψ. Então $\gamma \equiv \gamma'$.

"Iguais por iguais"

Prova do teorema por indução na estrutura de γ

- Casos base:
  - $\gamma = p$, para algum $p \in P$. A única subfórmula é o próprio γ, logo $\varphi = \gamma$ e $\psi = \gamma'$. Como por hipótese $\varphi \equiv \psi$, e a equivalência é reflexiva, conclui-se por transitividade que $\gamma \equiv \gamma'$ (ou seja $\gamma \equiv \varphi \equiv \psi \equiv \gamma'$).
  - O caso $\gamma = \perp$ sai de igual forma.
- Caso $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ (os restantes são semelhantes).
  Por hipótese de indução, para $i \in \{1, 2\}$ tem-se que $\gamma_i \equiv \gamma_i'$ se este último é obtido de γ_i substituindo ocorrências de φ por ψ. Como por hipótese φ é subfórmula de γ, há 3 casos a considerar: $\varphi = \gamma$ ou $\varphi \in \mathsf{SBF}(\gamma_i)$ (com $i \in \{1, 2\}$). O primeiro prova-se de forma semelhante aos casos base; considera-se então, sem perda de generalidade, que $\varphi \in \mathsf{SBF}(\gamma_1)$; logo, como a equivalência é preservada pelos operadores da lógica, $\gamma' = \gamma_1' \vee \gamma_2$, e conclui-se que $\gamma \equiv \gamma'$.

A equivalência lógica é uma congruência

Teorema: os operadores da lógica preservam a equivalência

Seja $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. Se $\varphi \equiv \psi$ então $\varphi * \gamma \equiv \psi * \gamma$ e $\gamma * \varphi \equiv \gamma * \psi$.

Prova . Note que na álgebra de Boole, '=' é uma congruência.

- $\varphi \vee \gamma \equiv \psi \vee \gamma$.

  Por hipótese $\varphi \equiv \psi$, *i.e.*, $V(\varphi) = V(\psi)$; logo, pela Proposição 4.3.2, $V(\varphi) \oplus V(\gamma) = V(\psi) \oplus V(\gamma)$; conclui-se então que $\varphi \vee \gamma \equiv \psi \vee \gamma$.

- $\varphi \wedge \gamma \equiv \psi \wedge \gamma$. A prova é semelhante.

- $\varphi \rightarrow \gamma \equiv \psi \rightarrow \gamma$.

  Por hipótese $\varphi \equiv \psi$, *i.e.*, $V(\varphi) = V(\psi)$; logo, pela Proposição 4.3.1, $\ominus V(\varphi) = \ominus V(\psi)$ e de novo pela Proposição 4.3.2, sai $\ominus V(\varphi) \oplus V(\gamma) = \ominus V(\psi) \oplus V(\gamma)$; conclui-se então que $\varphi \rightarrow \gamma \equiv \psi \rightarrow \gamma$.

A equivalência lógica é uma congruência

Teorema

A relação binária $\equiv$ sobre fórmulas da lógica proposicional, é uma congruência.

Prova

É uma relação de equivalência , preservada pelos operadores da lógica , e substitutiva.

Expressividade

Os conectivos são independentes?

- Definiu-se a Lógica Proposicional com os símbolos proposicionais, o Falso ($\bot$), a disjunção ($\vee$), a conjunção ($\wedge$) e a implicação ($\rightarrow$)
- Outros operadores importantes (Verdade $\top$, negação $\neg$ e equivalência $\leftrightarrow$) não são primitivos: foram definidos como abreviaturas
- Eram precisos todos os primitivos para se expressar as ideias básicas da lógica proposicional?
- Se se conseguir definir alguns como abreviaturas dos outros (mostrando que a semântica original e a da abreviatura são equivalentes), então pode-se prescidir deles como primitivos.
- Existirá um único conjunto mínimo?

Equivalências

Se mostrar que dada fórmula com um conectivo é equivalente a outra onde ele não ocorre, então esse conectivo pode ser definido como abreviatura (em vez de ser primitivo).

Implicação como abreviatura: $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

$V(\varphi \to \psi) = \ominus V(\varphi) \oplus V(\psi) = \ominus V(\varphi \vee \psi) = V(\neg\varphi \vee \psi)$

Disjunção como abreviatura: $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Mostra-se o resultado usando o Teorema da substitutividade, o axioma da dupla negação e uma das leis de De Morgan.

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi \equiv & \quad \neg(\neg(\varphi \vee \psi)) \text{ (pois } \gamma \equiv \neg\neg\gamma) \\ \equiv & \quad \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \text{ (pela distribuição da negação)} \end{aligned}$$

Conjunção como abreviatura: $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Mostra-se da mesma forma que acima.

São todos os conectivos necessários como primitivos?

Conjunção

O conectivo de conjunção pode ser definido como abreviatura se se tiver disjunção e negação.

$\varphi \wedge \psi \stackrel{\text{abv}}{=} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Disjunção

O conectivo de disjunção pode ser definido como abreviatura se se tiver conjunção e negação.

$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Conclusão

Com negação (primitiva ou não), basta ter ou disjunção ou conjunção.

São todos os conectivos necessários como primitivos?

O que temos como primitivo

- Falso: $\perp$
- Disjunção e conjunção: $\vee, \wedge$
- Implicação: $\rightarrow$

O que definimos como abreviatura

- Negação: $\neg\varphi \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \rightarrow \perp$
- Equivalência: $\varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{abv}}{=} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

Conjunção ou disjunção: basta um deles

Pode-se ter menos conectivos, pois a conjunção (respectivamente a disjunção) pode ser definida à custa da negação e da disjunção (respectivamente a conjunção).

São todos os conectivos necessários como primitivos?

Basta ter como primitivos

- Falso: $\bot$
- Implicação: $\rightarrow$

O que sai como abreviatura

- Negação: $\neg\varphi \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \rightarrow \bot$
- Verdade: $\top \stackrel{\text{abv}}{=} \neg\bot$
- Disjunção: $\varphi \vee \psi \stackrel{\text{abv}}{=} \neg\varphi \rightarrow \psi$
- Conjunção: $\varphi \wedge \psi \stackrel{\text{abv}}{=} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- Equivalência: $\varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{abv}}{=} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

São todos os conectivos necessários como primitivos?

Note-se que

Sem *falso* ($\perp$) temos que ter negação primitiva (não se consegue definir como abreviatura).

O falso sai como abreviatura se se tiver disjunção ou conjunção: $\perp \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \wedge \neg\varphi$

Implicação

O conectivo de implicação pode ser definido como abreviatura se se tiver disjunção e negação (primitiva): $\varphi \rightarrow \psi \stackrel{\text{abv}}{=} \neg\varphi \vee \psi$

Basta ter como primitivos

- Negação: $\neg$
- Disjunção: $\vee$ (ou conjunção, $\wedge$)

E como/quando juntar conectivos?

Note-se que

- Para provas por indução, convém ter o mínimo de conectivos.

  O conjunto mais conveniente é $\{\perp, \rightarrow\}$, porque $\perp$ é um operador constante, logo caso base.
- Para resolver exercícios, é útil ter o máximo de conectivos definidos, para evitar ter que expandir abreviaturas (usam-se directamente as definições).

Semântica da negação e equivalência

Satisfação

- Da negação: $V \Vdash \neg\varphi$, se não se tem que $V \Vdash \varphi$
- Da equivalência: $V \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, se $V \Vdash \varphi$ se e só se $V \Vdash \psi$

Tabelas de verdade

p	$\neg p$	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1