Lógica Computacional

Aula Teórica 5: Semântica da Lógica Proposicional

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Fórmula possível

Intuição

Há fórmulas que que são satisfeitas por *algumas* valorações: dizem-se *possíveis*.

Exemplo

Sejam $p, q \in P$, $V_1 : P \to \mathcal{B}$ tal que $V_1(p) = 1$ e $V_1(q) = 0$, e $V_2 : P \to \mathcal{B}$ tal que $V_2(p) = 0$ e $V_2(q) = 0$.

Tem-se que $V_1 \Vdash p \vee q$, pois $V_1(p \vee q) = V_1(p) \oplus V_1(q) = 1 \oplus V_1(q) = 1$.

No entanto, $V_2 \nVdash p \vee q$, pois como $V_2(p) = 0$ e $V_2(q) = 0$, tem-se que $V_2(p \vee q) = V_2(p) \oplus V_2(q) = 0 \oplus 0 = 0$.

Fórmula válida

Intuição

Há fórmulas que são satisfeitas por *todas* as valorações: dizem-se *válidas* ou *tautologias*.

Note-se que se uma fórmula é válida, é possível.

Exemplo: qualquer V satisfaz $p \vee \neg p$

$V \Vdash p \vee \neg p$, se $V \Vdash p$ ou se $V \Vdash \neg p$, *i.e.*, se $V(p) = 0$ ou $V(p) = 1$, que tem que se verificar porque V é uma função.

Prova

Note-se que $V(p \vee \neg p) = V(p) \oplus V(\neg p) = V(p) \oplus (\ominus V(p))$.

Se $V(p) = 0$ então $0 \oplus (\ominus 0) = 0 \oplus 1 = 1$.

Se $V(p) = 1$ então $1 \oplus (\ominus 1) = 1 \oplus 0 = 1$.

Fórmula contraditória

Intuição

Há fórmulas que não podem ser satisfeitas por *nenhuma* valoração: dizem-se *contraditórias*.

Exemplo: nenhum V satisfaz $p \land \neg p$.

Assumindo-se por absurdo que $V \Vdash p \land \neg p$, então $V \Vdash p$ e $V \Vdash \neg p$, ou seja, se $V \Vdash p$ e $V \nVdash p$, o que implica $V(p) = 1$ e $V(p) = 0$, que é impossível porque V é uma função.

Prova

Note-se que $V(p \land \neg p) = V(p) \otimes V(\neg p) = V(p) \otimes (\ominus V(p))$.

Se $V(p) = 0$ então $0 \otimes (\ominus 0) = 0 \otimes 1 = 0$.

Se $V(p) = 1$ então $1 \otimes (\ominus 1) = 1 \otimes 0 = 0$.

Fórmula possível, contraditória e válida

Terminologia

A fórmula $\varphi \in F_P$ diz-se:

- *possível*, se existe alguma estrutura de interpretação V sobre P que a satisfaz;
- *válida* (e denota-se $\models \varphi$), se toda a estrutura de interpretação V sobre P a satisfaz;
- *contraditória*, se nenhuma estrutura de interpretação V sobre P a satisfaz;
- uma fórmula proposicional válida diz-se também uma *tautologia*;
- escreve-se $\not\models \varphi$ se φ não é uma tautologia;
- um conjunto de fórmulas $\Phi \subseteq F_P$ diz-se *possível* se existe uma estrutura de interpretação V sobre P que satisfaz todas as fórmulas em Φ; caso contrário diz-se *contraditório*.

Possível, contraditória e válida: inter-relações

Lema 5.1

A fórmula que não é:

1. válida, pode ser possível ou contraditória;
2. contraditória, pode ser possível ou válida;
3. possível também não pode ser válida, logo é contraditória.

Lema 5.2

A negação de uma fórmula:

1. válida, é contraditória;
2. contraditória, é válida;
3. possível (não válida), é possível.

Primeiro lema

Prova

1. Uma fórmula é não válida, se não é verdade que todas as valorações a satisfazem, ou seja, alguma valoração não a satisfaz. Se uma outra valoração a satisfaz, então é possível; se não é contraditória.
2. Mostrar que uma fórmula não contraditória é possível ou válida usa raciocínio semelhante.
3. Uma fórmula que não é possível, não tem nem uma valoração que a satisfaça. Obviamente não é válida (todas as valorações a tinham que satisfazer), e como nenhuma valoração a satisfaz é, por definição, contraditória.

Segundo lema

Prova

1. Seja φ uma fórmula válida, *i.e.*, todas as valorações a satisfazem ($\models \varphi$); então, cada valoração não satisfaz $\neg\varphi$, ou seja, tem-se para qualquer V que$V \nVdash \neg\varphi$; logo, $\neg\varphi$ é contraditória.
2. Mostrar que a negação de uma fórmula contraditória é válida usa raciocínio semelhante.
3. Uma fórmula possível (não válida) φ tem alguma valoração V_1 que a satisfaz e que uma outra valoração V_2 que não a satisfaz. Como vimos, $V \Vdash \varphi$ se e só se $V \nVdash \neg\varphi$, logo $V_1 \nVdash \neg\varphi$ e $V_2 \Vdash \neg\varphi$, sendo então $\neg\varphi$ possível (não válida).

Análise por via semântica

Existe algum V que satisfaça $(p \wedge q) \to \perp$?

Por definição $V \Vdash \varphi \to \psi$ se $(\ominus V(\varphi)) \oplus V(\psi) = 1$.

Como para nenhum V se tem que $V \Vdash \perp$, *i.e.*, $V(\perp) = 0$, então

$$1 = (\ominus V(p \wedge q)) \oplus V(\perp) = (\ominus V(p \wedge q)) \oplus 0 = \ominus V(p \wedge q)$$

e conclui-se que $V \Vdash (p \wedge q) \to \perp$ se $V(p \wedge q) = 0$.

Pelo Lema 4.2.1, para se ter $V \nVdash p \wedge q$ não se pode ter $V(p) = 1 = V(q)$, ou seja, V tal que ou $V(p) \neq 1$ ou $V(q) \neq 1$ satisfaz $(p \wedge q) \to \perp$.

Como se encontraram valorações que não satisfazem a fórmula e outras que a satisfazem, a fórmula é possível (não válida).

Análise por via semântica

Existe algum V que satisfaça $(p \vee \neg p) \to \bot$?

Por definição $V \Vdash \varphi \to \psi$ se $(\ominus V(\varphi)) \oplus V(\psi) = 1$.

Como para nenhum V se tem que $V \Vdash \bot$, *i.e.*, $V(\bot) = 0$, então

$$1 = (\ominus V(p \vee \neg p)) \oplus V(\bot) = (\ominus V(p \vee \neg p)) \oplus 0 = \ominus V(p \vee \neg p)$$

e conclui-se que $V \Vdash (p \vee \neg p) \to \bot$ se $V(p \vee \neg p) = 0$.

Pelo Lema 4.2.3, só se tem que $V(p \vee \neg p) = 0$ se $V(p) = 0$ e $V(\neg p) = 0$, o que é impossível porque V é uma função e tem-se sempre ou $V(p) = 1$ (logo $V \Vdash p$) ou $V(p) = 0$ (logo $V \Vdash \neg p$). Portanto todo o V satisfaz $p \vee \neg p$.

Conclui-se que nenhum V satisfaz $(p \vee \neg p) \to \bot$, que é então uma fórmula contraditória.

Análise por via semântica

Existe algum V que satisfaça $\bot \to (p \wedge q)$?

Por definição $V \Vdash \varphi \to \psi$ se $(\ominus V(\varphi)) \oplus V(\psi) = 1$.

Como para nenhum V se tem que $V \Vdash \bot$, *i.e.*, $V(\bot) = 0$, então

$$(\ominus V(\bot)) \oplus V(p \wedge q) = \ominus 0 \oplus V(p \wedge q) = 1 \oplus V(p \wedge q) = 1$$

Conclui-se que todo o V satisfaz $\bot \to (p \wedge q)$, que é então uma fórmula válida.

Prova de $\models ((\varphi \to \psi) \land \varphi) \to \psi$

Mostra-se que $V(((\varphi \to \psi) \land \varphi) \to \psi) = 1$, para qualquer V.

$$
\begin{aligned}
V(((\varphi \to \psi) \land \varphi) \to \psi) &= \\
\ominus V((\varphi \to \psi) \land \varphi) \oplus V(\psi) &= \\
\ominus (V(\varphi \to \psi) \otimes V(\varphi)) \oplus V(\psi) &= \\
\ominus ((\ominus V(\varphi) \oplus V(\psi)) \otimes V(\varphi)) \oplus V(\psi) &= \\
(\ominus(\ominus V(\varphi) \oplus V(\psi)) \oplus \ominus V(\varphi)) \oplus V(\psi) &= \\
((\ominus \ominus V(\varphi) \otimes \ominus V(\psi)) \oplus \ominus V(\varphi)) \oplus V(\psi) &= \\
((V(\varphi) \otimes \ominus V(\psi)) \oplus \ominus V(\varphi)) \oplus V(\psi) &= \\
((V(\varphi) \oplus \ominus V(\varphi)) \otimes (\ominus V(\psi) \oplus \ominus V(\varphi))) \oplus V(\psi) &= \\
(1 \otimes (\ominus V(\psi) \oplus \ominus V(\varphi))) \oplus V(\psi) &= \\
(\ominus V(\psi) \oplus V(\psi)) \oplus \ominus V(\varphi) &= \\
1 \oplus \ominus V(\varphi) &= 1
\end{aligned}
$$

Análise combinatória de fórmulas

- Pode-se determinar a natureza de dada fórmula (possível, contraditória ou válida) analisando todas as possíveis atribuições de valor aos seus símbolos proposicionais.
- A satisfação de uma fórmula $\varphi \in F_P$ por dada valoração V depende apenas do valor que V atribui a cada $p \in \mathrm{SMB}(\varphi)$.
- Apesar de V ser uma aplicação com domínio infinito, como as fórmulas são sequências finitas de símbolos, a análise das possíveis valorações dos símbolos proposicionais da fórmula permite concluir a sua natureza.
- Dadas duas valorações V_1 e V_2 que atribuem os mesmos valores aos símbolos proposicionais de φ, ou ambas satisfazem φ ou nenhuma o satisfaz.
- Logo, a análise exaustiva das possíveis valorações para os símbolos de dada fórmula permite decidir a sua natureza.

Prova do Lema dos símbolos omissos

Lema dos símbolos omissos

Seja $\varphi \in F_P$ e considerem-se duas valorações V_1 e V_2. Se para cada $p \in P \cap \mathrm{SMB}(\varphi)$ se tem $V_1(p) = V_2(p)$, então $V_1(\varphi) = V_2(\varphi)$.

Por indução estrutural

- Casos base: $\varphi = \perp$ ou $\varphi = p$, para algum $p \in P$.
  O primeiro caso é vacuoso, pois $P \cap \mathrm{SMB}(\varphi) = \emptyset$.
  O segundo sai trivialmente, pois por hipotese $V_1(p) = V_2(p)$.
- Passo: φ é uma fórmula não atómica.

  Caso $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ (os outros são semelhantes).

$$
\begin{array}{rcl}
V_1(\varphi) & = & \text{(por definição)} \\
V_1(\varphi_1) \oplus V_1(\varphi_2) & = & \text{(por hipótese de indução)} \\
V_2(\varphi_1) \oplus V_2(\varphi_2) & = & \text{(por definição)} \\
V_2(\varphi) & &
\end{array}
$$

Tabelas de verdade

Construção da tabela de dada fórmula

Nas linhas colocam-se todas as possíveis combinações de valores para os seus símbolos proposicionais; faz-se uma coluna para cada subfórmula.

Tabelas da disjunção, conjunção e implicação

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$
0	0	0	0	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Tabelas de verdade

Tabela da negação

p	$\perp$	$\neg p \overset{\text{abv}}{=} p \to \perp$
0	0	1
1	0	0

Tabela da equivalência

p	q	$p \leftrightarrow q \overset{\text{abv}}{=} (p \to q) \wedge (q \to p)$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Análise de fórmulas

- Se uma fórmula é possível, então alguma linha da sua tabela está a 1.
- Se uma fórmula é contraditória, então todas as linhas da sua

Análise da validade de fórmulas

Tabela de $(p \land q) \to \bot$

p	q	$\bot$	$p \land q$	$(p \land q) \to \bot$
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	0	1	0

Fórmula possível (não válida)

Como a coluna da fórmula tem zeros e uns, há valorações que a satisfazem mas há uma valoração que não a satisfaz.

Na verdade não é necessário apresentar todas as linhas: basta uma com a coluna da fórmula a 1 para mostrar que é possível, e outra linha com 0 nessa coluna para mostrar que não é válida.

Análise da validade de fórmulas

Tabela de $(p \vee \neg p) \rightarrow \perp$

p	$\perp$	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$(p \vee \neg p) \rightarrow \perp$
0	0	1	1	0
1	0	0	1	0

Fórmula contraditória

Como a coluna da fórmula (a da direita) só tem zeros, nenhuma valoração a satisfaz.

Análise da validade de fórmulas

Tabela de $\perp \to (p \wedge q)$

p	q	$\perp$	$p \wedge q$	$\perp \to (p \wedge q)$
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	0	1	1

Fórmula válida

Como a coluna da fórmula (a da direita) só tem uns, todas as valorações a satisfazem.