Lógica Computacional

Aula Teórica 23: Dedução Natural em Lógica de Primeira Ordem

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Substituição

Variável por termo em fórmula: $\varphi\{t/x\}$

Denota a fórmula que se obtém de φ substituindo t nas ocorrências livres de x, sendo t livre para x em φ.

Captura de variáveis livres: quando t não é livre para x em φ

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \exists y\, y > x$ e $t \stackrel{\text{def}}{=} y + 1$. Então, $\varphi\{t/x\} = \exists y\, y > y + 1$.

Termo livre para variável em fórmula

O único caso relevante é quando a variável é x e $\varphi = \forall y\, \psi$ (ou $\varphi = \exists y\, \psi$). Então um termo t é livre para x em φ, se $y \notin \mathsf{V}(t)$ e t é livre para x em ψ.

Lema

Se para dado termo t e dada fórmula φ se tem que $\mathsf{V}(t) \cap \mathsf{VM}(\varphi) = \emptyset$, então t é livre para qualquer variável na fórmula φ

Introdução do Quantificador Existencial

Regra de introdução

Se um indivíduo de dado universo goza de certa propriedade, então existe algum indivíduo do universo que goza dessa propriedade.

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\{t/x\}\end{array}}{\exists x\, \varphi}\ (\exists_I)$$

Exemplo: $\{\forall x\,(P(x) \to Q(x)), P(a)\} \vdash \exists x\, Q(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(P(x) \to Q(x))^1}{P(a) \to Q(a)}\ (\forall_E) \qquad P(a)^2}{Q(a)}\ (\to_E)}{\exists x\, Q(x)}\ (\exists_I)$$

Eliminação do Quantificador Universal

Regra de eliminação

Se todos os indivíduos de dado universo gozam de certa propriedade, então cada um em particular goza também dessa propriedade.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \forall x\,\varphi\end{array}}{\varphi\{t/x\}}\;(\forall_E)$$

Note-se que t tem que ser livre para x em φ.

Eliminação do Quantificador Universal

Contra-Exemplo: $\{\forall x\, \exists y\, y > x\} \nvdash \exists y\, y > y + 1$

$$\exists y\, y > y + 1 = (\exists y\, y > x)\{y + 1/x\}$$

mas $y + 1$ NÃO é livre para x em $\exists y\, y > x$.

Exemplo: $\{\forall x\, \varphi\} \vdash \exists x\, \varphi$

Seja $y \in X$ tal que $y \notin \mathsf{V}(\forall x\, \varphi)$. Logo, y é livre para x em φ. Então,

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\, \varphi^1}{\varphi\{y/x\}}\ (\forall_E)}{\exists x\, \varphi}\ (\exists_I)$$

Introdução do Quantificador Universal

Regra de introdução

Se um indivíduo arbitrário de dado universo goza de certa propriedade, então qualquer indivíduo goza também dessa propriedade.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\{y/x\}\end{array}}{\forall x\, \varphi}\ (\forall_I)$$

Onde:

1. y não ocorre livre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}$;
2. se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ.

É fundamental garantir que o indivíduo é de facto arbitrário

Primeira condição

Variável que designa o indivíduo arbitrário não pode ocorrer livre nas hipóteses abertas da árvore de dedução.

Contra-Exemplo

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} x > 3$; logo $\varphi\{y/x\} = y > 3$. Como y não é livre para x em φ, tem-se que $\{y > 3\} \not\vdash \forall x\, x > 3$.

É fundamental garantir que o indivíduo é de facto arbitrário

Segunda condição

Se a variável que designa o indivíduo arbitrário não é a variável a abstrair, não pode ocorrer livre no corpo do quantificador.

Contra-Exemplo

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} x + 1 > y$; logo $\varphi\{y/x\} = y + 1 > y$. Como y não é livre para x em φ, tem-se que $\{y + 1 > y\} \not\vdash \forall x\, x + 1 > y$.

Combinação das regras do universal

Exemplo: $\{\forall x\,(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi$

Seja $y \in X$ tal que $y \notin \mathrm{VL}(\forall x\,(\varphi \wedge \psi))$. Logo, y é livre para x em φ e em ψ. Então,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(\varphi \wedge \psi)^1}{(\varphi \wedge \psi)\{y/x\} = \varphi\{y/x\} \wedge \psi\{y/x\}}\,(\forall_E)}{\varphi\{y/x\}}\,(\wedge_{E_d})}{\forall x\,\varphi}\,(\forall_I) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi\{y/x\}}\,(\wedge_{E_e})}{\forall x\,\psi}\,(\forall_I)}{\forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi}\,(\wedge_I)$$

Quantificador Existencial

Regra de eliminação

Se se prova que existe um indivíduo que verifica a propriedade φ e que assumindo que um indivíduo arbitrário verifica a propriedades φ se prova a propriedade ψ, então prova-se a propriedade ψ.

$$\dfrac{\begin{array}{cc} & (\varphi\{y/x\})^m \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \exists x\, \varphi & \psi \end{array}}{\psi}\ (\exists_E, m)$$

1. y não ocorre livre nem em ψ nem nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}_2$ distintas de $\varphi\{y/x\}$;
2. se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ;
3. a marca m fecha só as hipóteses $\varphi\{y/x\}$ em $\mathcal{D}_2$.

Contra-exemplo para a segunda parte da primeira condição

$\{P(a), Q(x)\} \not\vdash \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$

A árvore seguinte NÃO é uma prova.

$$\dfrac{\dfrac{P(a)^1}{\exists x\, P(x)}\,(\exists_I) \qquad \dfrac{\dfrac{P(x)^3 \qquad Q(x)^2}{P(x) \wedge Q(x)}\,(\wedge_I)}{\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))}\,(\exists_I)}{\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))}\,(\exists_E, 3)$$

Note-se que $P(x) = P(x)\{x/x\}$.

O problema é que a variável x ocorre livre na hipótese aberta $Q(x)$.

Contra-exemplo para a primeira parte da primeira condição

$\{\exists x\, Par(x), \forall x\, (Par(x) \rightarrow Par(x^2))\} \nvdash \forall x\, Par(x^2)$

A árvore seguinte NÃO é uma prova.

$$
\dfrac{(\exists x\, Par(x))^1 \qquad \dfrac{Par(x)^3 \qquad \dfrac{(\forall x\, (Par(x) \rightarrow Par(x^2)))^2}{Par(x) \rightarrow Par(x^2)}\,(\forall_E)}{Par(x^2)}\,(\rightarrow_E)}{\dfrac{Par(x^2)}{\forall x\, Par(x^2)}\,(\forall_I)}\,(\exists_E, 3)
$$

Note-se que $Par(x) = Par(x)\{x/x\}$.

O problema é que a variável x ocorre livre no nó $Par(x^2)$.

Contra-exemplo para a segunda condição

$\{\exists x\,(Par(x) \land y = 3)\} \nvdash Par(y) \land y = 3$

A árvore seguinte NÃO é uma prova.

$$\dfrac{(\exists x\,(Par(x) \land y = 3))^1 \qquad (Par(y) \land y = 3)^2}{Par(y) \land y = 3}\,(\exists_E, 2)$$

Note-se que $Par(y) = Par(x)\{y/x\}$.

O problema é que a variável y é diferente de x mas ocorre livre em $Par(x) \land y = 3$.

Eliminação do Existencial

$\{\exists x\, \neg\varphi\} \vdash \neg\forall x\, \varphi$

Seja y livre para x em φ tal que $y \notin \mathrm{VL}(\varphi)$. Então, $y \notin \mathrm{VL}(\exists x\, \neg\varphi) \cup \mathrm{VL}(\forall x\, \varphi)$. Constroi-se então a seguinte prova.

$$\dfrac{\dfrac{(\exists x\, \neg\varphi)^1 \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x\, \varphi)^2}{\varphi\{y/x\}}\,(\forall_E) \qquad (\neg\varphi)\{y/x\} = (\neg\varphi\{y/x\})^3}{\perp}\,(\rightarrow_E)}{\perp}\,(\exists_E, 3)}{\neg\forall x\, \varphi}\,(\rightarrow_I, 2)$$

All together now

$$\{\forall x\,\forall y\,(P(x,y)\rightarrow P(y,x)), \forall x\,\exists y\,P(x,y)\} \vdash \forall x\,\exists y\,(P(x,y)\wedge P(y,x))$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\forall x\,\exists y\,P(x,y))^2$}
\RightLabel{$(\forall_E)$}
\UnaryInfC{$\exists y\,P(u,y)$}
\AxiomC{$P(u,v)^3$}
\AxiomC{$(\forall x\,\forall y\,(P(x,y)\rightarrow P(y,x)))^1$}
\RightLabel{$(\forall_E)$}
\UnaryInfC{$\forall y\,(P(u,y)\rightarrow P(y,u))$}
\RightLabel{$(\forall_E)$}
\UnaryInfC{$P(u,v)\rightarrow P(v,u)$}
\AxiomC{$P(u,v)^3$}
\BinaryInfC{$P(v,u)$}
\RightLabel{$(\wedge_I)$}
\BinaryInfC{$P(u,v)\wedge P(v,u)$}
\RightLabel{$(\exists_I)$}
\UnaryInfC{$\exists y\,(P(u,y)\wedge P(y,u))$}
\RightLabel{$(\exists_E, 3\ (C_1, C_2, C_3))$}
\BinaryInfC{$\exists y\,(P(u,y)\wedge P(y,u))$}
\RightLabel{$(\forall_I\ (C_4, C_5))$}
\UnaryInfC{$\forall x\,\exists y\,(P(x,y)\wedge P(y,x))$}
\end{prooftree}
$$

$$C_1 \stackrel{\text{def}}{=} v \notin \mathsf{VL}(\forall x\,\forall y\,(P(x,y)\rightarrow P(y,x)))$$

$$C_2 \stackrel{\text{def}}{=} v \notin \mathsf{VL}(\exists y\,(P(u,y)\wedge P(y,u)))$$

$$C_3 \stackrel{\text{def}}{=} v \notin \mathsf{VL}(P(u,y))$$

$$C_4 \stackrel{\text{def}}{=} u \notin \mathsf{VL}(\forall x\,\exists y\,(P(x,y)\wedge P(y,x)))$$

$$\quad e\ \ u \notin \mathsf{VL}(\forall x\,\exists y\,P(x,y))$$

$$C_5 \stackrel{\text{def}}{=} u \notin \mathsf{VL}(\exists y\,(P(x,y)\wedge P(y,x)))$$