Lógica Computacional

Aula Teórica 22: Dedução Natural em Lógica de Primeira Ordem

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Um sistema dedutivo

Objectivo

Determinar a validade de raciocínios (ou de fórmulas) simplesmente por manipulação sintáctica dos símbolos que ocorrem nas fórmulas (sem recorrer à semântica).

Meio: sistema dedutivo

Uma extensão ao Sistema da Lógica Proposicional: às regras dos conectivos proposicionais juntam-se regras de introdução e eliminação para cada quantificador.

Provas

Uma prova é uma sequência de fórmulas, sendo

- as primeiras as hipóteses (pode ser o conjunto vazio);
- cada uma das que não é uma hipótese foi obtida por aplicação de uma regra, eventualmente usando fórmulas anteriores (na sequência) como hipóteses dessa regra;
- a última fórmula da sequência é a conclusão desejada.

Notação

Sendo $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ um conjunto de hipóteses (com $n \geq 0$) e ϕ uma conclusão a provar, escreve-se

$$\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \phi$$

se a partir das hipóteses $\phi_1, \ldots, \phi_n$ se consegue construir uma prova para ϕ.

Resultados

Terminologia

- Se se prova $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \phi$ então ϕ diz-se consequência do conjunto de hipóteses;
- Se se prova $\emptyset \vdash \phi$ então ϕ diz-se *teorema* do sistema dedutivo (e escreve-se $\vdash \phi$).

Correcção e Completude. Um sistema de prova deve ser:

- *Correcto*: só permite derivar provas para fórmulas válidas e para consequências semânticas

$$\Phi \vdash \phi \text{ implica } \Phi \models \phi$$

- *Completo*: permite derivar provas para todas as fórmulas válidas e para todas as consequências semânticas

$$\Phi \models \phi \text{ implica } \Phi \vdash \phi$$

O que é uma prova?

Provas como árvores etiquetadas

- Uma prova ou inferência é apresentada em árvore, dita de dedução ou derivação.
- Cada árvore é construida a partir de árvores singulares (ou folhas) utilizando-se as regras de inferência.
- Obtém-se um novo nível da árvore por aplicação de uma regra de inferência. Cada conectivo tem duas regras associadas (de introdução e de eliminação desse conectivo), excepto o falso ($\perp$) que pode apenas ser eliminado.
- A etiquetas dos nós são fórmulas.
  - As fórmulas nas folhas são as hipóteses, e têm associadas marcas (números inteiros); A hipóteses distintas devem-se associar marcas distintas.
  - A fórmula na raíz é a conclusão da prova. Diz-se que a árvore é uma derivação dessa fórmula.

Quantificador Universal: é fácil eliminar

Regra de eliminação

Se todos os indivíduos de dado universo gozam de certa propriedade, então cada um em particular goza também dessa propriedade.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \forall x\,\varphi\end{array}}{\varphi\{t/x\}}\ (\forall_E)$$

Exemplo: $\{\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vdash Q(a)$

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))^1}{P(a) \rightarrow Q(a)}\,(\forall_E) \qquad P(a)^2}{Q(a)}\,(\rightarrow_E)$$

Quantificador Existencial: é fácil introduzir

Regra de introdução

Se um indivíduo de dado universo goza de certa propriedade, então existe algum indivíduo do universo que goza dessa propriedade.

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\{t/x\}\end{array}}{\exists x\, \varphi}\ (\exists_I)$$

Exemplo: $\{\forall x\,(P(x) \to Q(x)), P(a)\} \vdash \exists x\, Q(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(P(x) \to Q(x))^1}{P(a) \to Q(a)}\ (\forall_E) \qquad P(a)^2}{Q(a)}\ (\to_E)}{\exists x\, Q(x)}\ (\exists_I)$$

Quantificador Universal: como introduzir?

Fácil se a fórmula só tem variáveis mudas

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\,(P(y)\to Q(y))^1}{P(x)\to Q(x)}\,(\forall_E) \qquad \dfrac{\forall y\,P(y)^2}{P(x)}\,(\forall_E)}{Q(x)}\,(\to_E)}{\forall x\,Q(x)}\,(\forall_I)$$

Provou-se $\{\forall y\,(P(y)\to Q(y)), \forall y\,P(y)\} \vdash \forall x\,Q(x)$.

A variável x representa uma entidade arbitrária porque não ocorre nas hipóteses.

Prova-se da mesma maneira que $\{\forall x\,(P(x)\to Q(x)), \forall x\,P(x)\} \vdash \forall x\,Q(x)$, porque x não ocorre *livre* nas hipóteses.

Quantificador Universal: como introduzir?

E se há variáveis livres nas hipóteses abertas?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(P(x) \to Q(x))^1}{P(x) \to Q(x)}\,(\forall_E) \qquad P(x)^2}{Q(x)}\,(\to_E)}{\forall x\, Q(x)}\,(\forall_I)$$

Esta árvore *não* é uma prova: a variável x na hipótese $P(x)$ representa uma entidade concreta (mas desconhecida), pelo que não pode ser abstraida.

Do conhecimento que um valor particular tem certa propriedade não se pode concluir que todos os valores a têm.

Quantificador Universal: como introduzir?

E se há variáveis livres nas hipóteses fechadas?

O seu âmbito fica restricto.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P(x)^3}{\exists x\, \neg P(x)}\,(\exists_I) \qquad \neg\exists x\, \neg P(x)^2}{\perp}\,(\rightarrow_E)}{P(x)}\,(\perp, 3)}{\forall x\, P(x)}\,(\forall_I) \qquad \neg(\forall x\, P(x))^1}{\perp}\,(\rightarrow_E)}{\exists x\, \neg P(x)}\,(\perp, 2)
$$

Provou-se $\{\neg(\forall x\, P(x))\} \vdash \exists x\, \neg P(x)$ mostrando-se em provas por absurdo propriedades de algum x (desconhecido).

Quantificador Universal: como introduzir?

$\{\forall x\,\forall y\,P(x,y)\} \vdash \forall y\,\forall x\,P(y,x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,\forall y\,P(x,y)^1}{\forall y\,P(z,y)}\,(\forall_E)}{P(z,x)}\,(\forall_E)}{\forall x\,P(z,x)}\,(\forall_I)}{\forall y\,\forall x\,P(y,x)}\,(\forall_I,\text{ pois } (\forall x\,P(z,x))\{y/z\} = \forall x\,P(y,x))$$

Variável a abstrair não pode ocorrer livre

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\,y \geq y}{y \geq y}\,(\forall_E)}{\forall x\,x \geq y}\,(\forall_I)}{\exists y\,\forall x\,x \geq y}\,(\exists_I)$$

Esta árvore *não* é uma prova: $(x \geq y)\{y/x\} = y \geq y$, mas y não é livre em $x \geq y$.

Quantificador Universal

Regra de introdução

Se um indivíduo arbitrário de dado universo goza de certa propriedade, então qualquer indivíduo goza também dessa propriedade.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\{y/x\}\end{array}}{\forall x\, \varphi}\ (\forall_I)$$

Onde:

1. y não ocorre livre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}$;
2. se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ.

Quantificador Existencial: como eliminar?

$\{\forall x\,(P(x) \to Q), \exists x\, P(x)\} \vdash Q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(P(x) \to Q)^1}{P(y) \to Q}\,(\forall_E) \qquad P(y)^2}{Q}\,(\to_E) \qquad \exists x\, P(x)^3}{Q}\,(\exists_E, 2)$$

Ideia

Se se sabe que quando um indivíduo tem a propriedade φ se pode concluir a propriedade ψ, e se sabe que algum indivíduo tem certa propriedade φ, pode-se concluir a propriedade ψ.

Requisitos

1. O indivíduo concreto que se assume ter a propriedade φ deve ser genérico:não pode estar (livre) nas hipóteses abertas.
2. a propriedade a concluir não depende do indivíduo.

Quantificador Existencial

Regra de eliminação

$$\dfrac{\begin{array}{cc} & (\varphi\{y/x\})^m \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \exists x\, \varphi & \psi \end{array}}{\psi}\ (\exists_E, m)$$

Onde:

1. y não ocorre livre nem em ψ nem nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}_2$ distintas de $\varphi\{y/x\}$;
2. se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ;
3. a marca m apenas fecha (eventualmente) hipóteses $\varphi\{y/x\}$ em $\mathcal{D}_2$.