Lógica Computacional

Aula Teórica 21: resolução em Primeira Ordem

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Resolventes de Primeira Ordem

Dada uma fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^{X}$ tal que $FNS(\varphi)$, define-se $\mathrm{Res}^*(\varphi)$ de forma idêntica à da Lógica Proposicional.
Para dado literal positivo L, seja $\overline{L} = \neg L$ ou $\overline{\neg L} = L$.

Definição 21.1: resolvente de primeira ordem

Considerem-se duas cláusulas C_1 e C_2 e duas substituições s_1 e s_2 tal que $C_1 s_1$ e $C_2 s_2$ não partilham variáveis.

Seja $\mathcal{L} = \{\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m, L'_1, \ldots, L'_n\}$ um conjunto unificável de literais positivos tal que
$\{L_1, \ldots, L_m\} \subseteq C_1 s_1$ e $\{L'_1, \ldots, L'_n\} \subseteq C_2 s_2$.

Se $sub = umg(\mathcal{L})$ então

$$R = ((C_1 s_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup (C_2 s_2 \setminus \{L'_1, \ldots, L'_n\}))sub$$

é um resolvente de C_1 e C_2 (ditos seus "pais").

Exemplo: um resolvente

$C_1 = \{Q(x, y), P(f(x), y)\}$ e
$C_2 = \{R(x, c), \neg P(f(c), x), \neg P(f(y), h(a))\}$

Como encontrar um resolvente de C_1 e C_2?

1. Faz-se conversão-α porque C_1 e C_2 partilham variáveis.

   Seja $s_1 = \{u, v/x, y\}$. Então $C_1 s_1 = \{Q(u, v), P(f(u), v)\}$.

2. Considere-se $\mathcal{L} = \{P(f(u), v), P(f(c), x), P(f(y), h(a))\}$.

   $\mathcal{L}$ é unificável, sendo o seu *umg* a sequência de substituições $sub = \{c, h(a), h(a), c/u, v, x, y\}$.

O resolvente de C_1 e C_2 é então
$((C_1 s_1 \setminus \{P(f(u), v)\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg P(f(c), x), \neg P(f(y), h(a))\}))sub =$
$\{Q(u, v), R(x, c)\}sub = \{Q(c, h(a)), R(h(a), c)\}$.

Exemplo: resolução em primeira ordem

Verifica-se que a seguinte fórmula é contraditória

$$(\neg P(x,f(x)) \vee \neg Q(f(x),x)) \wedge (P(x,y) \vee P(x,f(x))) \wedge (Q(y,x) \vee Q(f(x),x))$$

Considere-se:

- $s_2 = \{u/x\}\{v/y\}$, sendo então $C_2s_2 = \{P(u,v), P(u,f(u))\}$
- $s_3 = \{z/x\}\{w/y\}$, sendo então $C_3s_3 = \{Q(w,z), Q(f(z),z)\}$
- $umg_1 = \{x/z\}\{f(x)/w\}$, sendo então $\{Q(w,z), Q(f(z),z), Q(f(x),x)\}umg_1 = \{Q(w,x), Q(f(x),x)\}\{f(x)/w\} = \{Q(f(x),x)\}$
- $umg_2 = \{x/u\}\{f(x)/v\}$, sendo então $\{P(u,v), P(u,f(u)), P(x,f(x))\}umg_2 = \{P(x,v), P(x,f(x))\}\{f(x)/v\} = \{P(x,f(x))\}$

Resolvendo C_3s_3 com C_1 usando o umg_1 obtém-se o resolvente $\{\neg P(x,f(x))\}$, que resolvido com C_2s_2 usando o umg_2 dá a cláusula vazia. Conclui-se que a fórmula é contraditória.

Correcção da regra do resolvente

Lema 21.1: correcção dos resolventes

Seja R resolvente de C_1 e de C_2, e considere as fórmulas ψ resultante de R, φ_1 resultante de C_1 e φ_2 resultante de C_2. Então $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$.

Proposição 21.1: resolvente é consequência das cláusulas

Se φ é uma fórmula que resulta da cláusula C e ψ é uma fórmula que resulta da cláusula $Csub$, sendo sub uma sequência de substituições. Então $\models \varphi \to \psi$.

Correcção da resolução

Lema 21.2: resultado da resolução

Dada uma fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$ tal que $\mathsf{FNS}(\varphi)$, tem-se que φ é contraditória se e só se $\emptyset \in \mathsf{Res}^*(\varphi)$.

Proposição 21.2: consequência semântica e resolução

Dadas fórmulas $\varphi, \psi, \gamma \in F_\Sigma^X$ tal que $\mathsf{FNS}(\gamma)$ e $\gamma \equiv \varphi \wedge \neg\psi$, tem-se que $\{\varphi\} \models \psi$ se e só se $\emptyset \in \mathsf{Res}^*(\gamma)$.

Provar correcto um raciocínio

Afirmação a provar

Como não tenho nenhum Rolls Royce, todos os meus Rolls Royces são branco e todos os meus Rolls Royces são pretos.

Como proceder?

1. Traduzir a afirmação para Lógica de Primeira Ordem.
2. Converter para FNCP.
3. Converter para FNS.
4. Usar resolução.

Representação do raciocínio

Afirmação a provar

Como não tenho nenhum Rolls Royce, todos os meus Rolls Royces são branco e todos os meus Rolls Royces são pretos.

Assinatura a usar

Considere-se uma assinatura de primeira ordem que contenha os seguintes símbolos.

- $eu \in SF_0$
- $\{RR, Branco, Preto\} \subseteq SP_1$
- $Dono \in SP_2$

Representação do raciocínio

Afirmação a provar

Como não tenho nenhum Rolls Royce, todos os meus Rolls Royces são branco e todos os meus Rolls Royces são pretos.

Tradução para Lógica de Primeira Ordem

1. Não tenho nenhum Rolls Royce

$$\neg\exists\, x\, (RR(x) \wedge Dono(eu, x))$$

2. Todos os meus Rolls Royces são branco e todos os meus Rolls Royces são pretos

$$\forall\, x\, ((RR(x) \wedge Dono(eu, x)) \rightarrow Branco(x)) \wedge$$
$$\forall\, x\, ((RR(x) \wedge Dono(eu, x)) \rightarrow Preto(x))$$

Representação do raciocínio

Afirmação a provar

Como não tenho nenhum Rolls Royce, todos os meus Rolls Royces são branco e todos os meus Rolls Royces são pretos.

$$
\begin{gathered}
\neg \exists x\, (RR(x) \wedge Dono(eu, x)) \models \\
\forall x\, ((RR(x) \wedge Dono(eu, x)) \rightarrow Branco(x)) \wedge \\
\forall x\, ((RR(x) \wedge Dono(eu, x)) \rightarrow Preto(x))
\end{gathered}
$$

Vamos usar a Proposição 21.1.

Conversão para FNS

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\exists\, x\, (RR(x) \wedge Dono(eu, x))$.Vamos calcular

$$\psi = \mathcal{P}(\varphi) = \text{Scope}(\text{NNFC}(\text{ImplFree}(\varphi)))$$

Note-se que $\text{ImplFree}(\varphi) = \varphi$.

$$\begin{aligned} \text{NNFC}(\varphi) \; &= \forall\, x \;\text{NNFC}(\neg(RR(x) \wedge Dono(eu, x))) \\ &\quad \forall\, x\, (\text{NNFC}(\neg RR(x)) \vee \text{NNFC}(\neg Dono(eu, x))) \\ &\quad \forall\, x\, (\neg RR(x) \vee \neg Dono(eu, x)) \stackrel{\text{def}}{=} \psi \end{aligned}$$

Note-se agora que $\text{Scope}(\psi) = \psi$ e que $\text{FNS}(\psi)$.

Conversão para FNS

Seja agora

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\forall x\, ((RR(x) \land Dono(eu, x)) \to Branco(x)) \\ \land \forall x\, ((RR(x) \land Dono(eu, x)) \to Preto(x)))$$

Vamos calcular $\delta = \mathcal{P}(\gamma) = \text{Scope}(\text{NNFC}(\text{ImplFree}(\gamma)))$

$$\begin{aligned} \text{ImplFree}(\gamma) &= \neg(\text{ImplFree}(\forall x\, ((RR(x) \land Dono(eu, x)) \to Branco(x))) \\ &\quad \land \text{ImplFree}(\forall x\, ((RR(x) \land Dono(eu, x)) \to Preto(x)))) \\ &= \neg(\forall x\; \text{ImplFree}((RR(x) \land Dono(eu, x)) \to Branco(x)) \\ &\quad \land \forall x\; \text{ImplFree}((RR(x) \land Dono(eu, x)) \to Preto(x))) \\ &= \neg(\forall x\, (\neg(RR(x) \land Dono(eu, x)) \lor Branco(x)) \\ &\quad \land \forall x\, (\neg(RR(x) \land Dono(eu, x)) \lor Preto(x))) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \end{aligned}$$

Conversão para FNS

$$
\begin{aligned}
\mathrm{NNFC}(\eta) = {} & \quad \mathrm{NNFC}(\neg\forall x\,(\neg(RR(x) \wedge Dono(eu,x)) \vee Branco(x))) \\
& \vee \mathrm{NNFC}(\neg\forall x\,(\neg(RR(x) \wedge Dono(eu,x)) \vee Preto(x)))) \\
= {} & \exists x\ \mathrm{NNFC}(\neg(\neg(RR(x) \wedge Dono(eu,x)) \vee Branco(x))) \\
& \vee \exists x\ \mathrm{NNFC}(\neg(\neg(RR(x) \wedge Dono(eu,x)) \vee Preto(x))) \\
= {} & \exists x\,(\mathrm{NNFC}(\neg\neg(RR(x) \wedge Dono(eu,x))) \wedge \neg Branco(x)) \\
& \vee \exists x\,(\mathrm{NNFC}(\neg(\neg(RR(x) \wedge Dono(eu,x))) \wedge \neg Preto(x)) \\
= {} & \exists x\,(RR(x) \wedge Dono(eu,x) \wedge \neg Branco(x)) \\
& \vee \exists x\,(RR(x) \wedge Dono(eu,x) \wedge \neg Preto(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \mu
\end{aligned}
$$

Conversão para FNS

$$\begin{aligned}
\mathsf{Scope}(\mu) &= \exists z\ \mathsf{Scope}((RR(z) \wedge Dono(eu, z) \wedge \neg Branco(z)) \\
&\qquad \vee \exists x\,(RR(x) \wedge Dono(eu, x) \wedge \neg Preto(x))) \\
&= \exists z\,\exists y\,((RR(z) \wedge Dono(eu, z) \wedge \neg Branco(z)) \\
&\qquad \vee (RR(y) \wedge Dono(eu, y) \wedge \neg Preto(y))) \stackrel{\text{def}}{=} \delta
\end{aligned}$$

Note-se que FNP(δ), mas fazendo $\delta = \exists z\,\exists y\,\theta$, tem-se FND($\theta$), não FNC($\theta$).

Conversão para FNS

Vamos então calcular $\nu = \text{CNFC}(\theta)$. Fazendo as distribuições, obtém-se

$$
\begin{aligned}
&(RR(z) \vee RR(y)) \wedge (Dono(eu,z) \vee RR(y)) \wedge (\neg Branco(z) \vee RR(y)) \\
\wedge&(RR(z) \vee Dono(eu,y)) \wedge (Dono(eu,z) \vee Dono(eu,y)) \\
\wedge&(\neg Branco(z) \vee Dono(eu,y)) \\
\wedge&(RR(z) \vee \neg Preto(y)) \wedge (Dono(eu,z) \vee \neg Preto(y)) \\
\wedge&(\neg Branco(z) \vee \neg Preto(y))
\end{aligned}
$$

Finalmente, skolemiza-se: $s^2(\exists\, z\, \exists\, y\, \nu) = \nu\{a/z\}\{b/y\}$

Representação em cláusulas

Temos então 9 cláusulas:

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \{RR(a), RR(b)\} \\
C_3 &= \{Dono(eu, a), RR(b)\} \\
C_4 &= \{\neg Branco(a), RR(b)\} \\
C_5 &= \{RR(a), Dono(eu, b)\} \\
C_6 &= \{Dono(eu, a), Dono(eu, b)\} \\
C_7 &= \{\neg Branco(b), Dono(eu, b)\} \\
C_8 &= \{RR(a), \neg Preto(b)\} \\
C_9 &= \{Dono(eu, a), \neg Preto(b)\} \\
C_{10} &= \{\neg Branco(a), \neg Preto(b)\}
\end{aligned}
$$

A primeira é $C_1 = \{\neg RR(x), \neg Dono(eu, x)\}$.

Resolução: o conjunto de cláusulas é contraditório

Dedução	Justificação
$\{\neg RR(x), \neg Dono(eu, x)\}$	Cláusula C_1
$\{RR(a), RR(b)\}$	Cláusula C_2
$\{\neg RR(b), \neg Dono(eu, a)\}$	Resolvente de C_1 com $\{a/x\}$ e C_2 (R_1)
$\{Dono(eu, a), RR(b)\}$	Cláusula C_3
$\{RR(b)\}$	Resolvente de R_1 e C_3 (R_2)
$\{\neg RR(a), \neg Dono(eu, b)\}$	Resolvente de C_1 com $\{b/x\}$ e C_2 (R_3)
$\{Dono(eu, b), RR(a)\}$	Cláusula C_5
$\{RR(a)\}$	Resolvente de R_3 e C_5 (R_4)
$\{\neg RR(b), \neg Dono(eu, a)\}$	Resolvente de C_1 com $\{b/x\}$ e C_6 (R_5)
$\{\neg RR(a), \neg RR(b)\}$	Resolvente de C_1 com $\{a/x\}$ e R_5 (R_6)
$\{\neg RR(a)\}$	Resolvente de R_2 e R_6 (R_7)
$\emptyset$	Resolvente de R_4 e R_7