Lógica Computacional

Aula Teórica 2: Sintaxe da Lógica Proposicional

António Ravara   Simão Melo de Sousa

Departamento de Informática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Informática, Faculdade Engenharia, LISP & Release Group Universidade Beira Interior

Lógica proposicional

Um sistema formal de raciocínio, constituido por:

- Um *alfabeto* (conjunto de símbolos).
- Uma *linguagem* (conjunto de fórmulas).
- Uma *semântica* (para valoração de símbolos e fórmulas).
- Um *cálculo* (sistema sintático de prova, para raciocinar).

Objecto

- Ocupa-se do estudo do comportamento dos *conectivos* lógicos (negação, disjunção, conjunção, implicação e equivalência) e das regras que os manipulam.
- Linguagem das *asserções* ou *proposições*: afirmações que são ou verdadeiras ou falsas.
- Linguagem construida a partir de símbolos proposicionais (asserções básicas) e conectivos lógicos (ligam asserções).

Asserções

Exemplos

- Básicas:
  - hoje chove;
  - todo o natural par maior que 2 é a soma de dois primos.
- Compostas:
  - estudo hoje *ou* amanha;
  - jogo hoje *e* amanha;
  - *se* tenho aulas *então* vou à Faculdade;
  - n é par se e só se $\text{mod}(n, 2) = 0$.
- Não são asserções:
  - passe-me o sal, se faz favor;
  - quanto mais depressa, mais devagar.

Definição da sintaxe da lógica proposicional

Objectivo

- Obter a linguagem formal das fórmulas proposicionais.
- A partir de um alfabeto (conjunto de símbolos, representando asserções) define-se como construir palavras (sequências finitas de símbolos, ditas *fórmulas*).

Definição 2.1: alfabeto proposicional sobre um conjunto P

Seja P um conjunto numerável (de símbolos proposicionais). O *alfabeto proposicional sobre P*, denotado Alf_P, é o conjunto constituido:

- por cada um dos elementos de P (as *asserções básicas*);
- pelo símbolo $\perp$ (chamado *falso*, ou *absurdo*);
- pelos conectivos *disjunção*, $\vee$, *conjunção*, $\wedge$ e *implicação*, $\rightarrow$;
- pelos parênteses esquerdo e direito, (e).

Definição da sintaxe da lógica proposicional

Nem toda a sequência de símbolos do alfabeto é uma palavra da linguagem. Vamos defini-la com (axiomas e) regras.

Definição 2.2: linguagem proposicional induzida por Alf_P

A *linguagem proposicional induzida por* Alf_P, denotada F_P, é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

- *BOT*: $\perp \in F_P$
- *PROP*: se $p \in P$ então $p \in F_P$
- *DIS*: se $\varphi, \psi \in F_P$ então $(\varphi \vee \psi) \in F_P$
- *CON*: se $\varphi, \psi \in F_P$ então $(\varphi \wedge \psi) \in F_P$
- *IMP*: se $\varphi, \psi \in F_P$ então $(\varphi \to \psi) \in F_P$

Terminologia

- Os elementos de F_P dizem-se *fórmulas*.
- Os elementos de P e o símbolo $\perp$ dizem-se fórmulas *atómicas*.

Que sequências são fórmulas?

Não são necessariamente fórmulas todas as sequências de símbolos do alfabeto.

As sequências seguintes não são fórmulas

- $pq \notin F_P$, porque não se podem fazer sequências de símbolos proposicionais;
- $(p\vee) \notin F_P$, porque a disjunção é um operador binário e a expressão só tem um operando;
- $(p \rightarrow (\vee q)) \notin F_P$, porque a implicação é um operador binário que deve ter como argumentos/operandos duas fórmulas; no entanto, apesar de p ser uma fórmula, $(\vee q)$ não o é.

Facilmente se vê que não foram seguidas as regras para definir fórmulas.

Que sequências são fórmulas?

Como mostrar que $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)) \in F_P$

Prova de fórmulas

Sejam $p, q, r \in P$.

1. Por *PROP*, tem-se que $p \in F_P$.
2. Por *PROP*, tem-se que $q \in F_P$.
3. Por *PROP*, tem-se que $r \in F_P$.
4. Por *DIS*, com 1 e 2, tem-se que $(p \vee q) \in F_P$.
5. Por *IMP*, com 4 e 3, tem-se que $((p \vee q) \rightarrow r) \in F_P$.
6. Por *CON*, com 1 e 5, tem-se que $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)) \in F_P$.

Exemplos de fórmulas da lógica proposicional

Asserções básicas e compostas

Considere as seguintes asserções básicas.

- p: 'estudo hoje'
- q: 'estudo amanhã'
- r: 'tenho exame amanhã'.

Constroiem-se as seguintes asserções compostas:

- estudo hoje *ou* estudo amanhã: $p \vee q$
- estudo hoje *e* estudo amanhã: $p \wedge q$
- *se* tenho exame amanhã *então* estudo hoje *e* estudo amanhã: $r \rightarrow (p \wedge q)$

Abreviaturas

Definição 2.3: abreviaturas

São úteis novos conectivos para abreviar alguns tipos de fórmulas.

- Negação: $\neg\varphi \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \to \bot$;
- Verdade: $\top \stackrel{\text{abv}}{=} \neg\bot$;
- Equivalência: $\varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{abv}}{=} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Convenções

- Para simplificar a notação omitem-se por vezes os parênteses mais exteriores das fórmulas.
- Consideramos que o conectivo $\neg$ tem precedência.

Exemplos

- $\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{abv}}{=} ((\varphi \to \bot) \wedge \psi) \to \bot$
- $\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \vee \delta) \stackrel{\text{abv}}{=} ((\varphi \to \bot) \to (\psi \vee \delta)) \wedge ((\psi \vee \delta) \to (\varphi \to \bot))$

Tradução da linguagem natural para lógica proposicional

Intuição

- Os símbolos proposicionais representam asserções básicas (afirmações verdadeiras ou falsas): 'estudo hoje'.
- O conectivo disjunção representa alternativa.
  " hoje ou amanhã" $(p \vee q)$.
- O conectivo conjunção indica que a frase só é verdade se cada uma das partes o for.
  A fórmula $p \wedge q$ traduz as frases "p e q", "tanto p como q", "p tal como q", etc,. . .
- O conectivo implicação captura consequência. À esquerda está o *antecedente* (hipótese) e à direita o *consequente* (tese).
  A fórmula $p \to q$ traduz as frases "se p então q", "se p, q", "q se p", "p só se q", "caso p então q", "caso p, q", "como p, q", etc,. . .

Tradução da linguagem natural para lógica proposicional

Asserções básicas e compostas

- "gosto de lógica" escreve-se p;
  "gosto de álgebra" escreve-se q;
  "gosto de análise" escreve-se r;
- "gosto de lógica e de álgebra" escreve-se $p \wedge q$;
- "gosto de lógica ou gosto de álgebra" escreve-se $p \vee q$;
- "gosto de lógica ou de álgebra e de análise" é ambígua, mas "gosto de lógica ou gosto de álgebra e de análise" já não;
  nas fórmulas, os parênteses desambiguam: $p \vee q \wedge r$ é ambígua, mas $p \vee (q \wedge r)$ já não.
- Há ambiguidades difíceis de resolver: "o Pedro foi ao médico e ficou doente" tanto pode querer dizer $m \wedge d$ como $m \rightarrow d$.

Tradução da linguagem natural para lógica proposicional

Outras ambiguidades da linguagem natural

- "o Pedro ficou doente e foi ao médico " à primeira vista deve querer dizer $d \to m$ mas também d (ou seja $(d \to m) \wedge d$), e não nessariamente $d \wedge m$. Mas pensando bem...
- "gosto de programação ou gosto de futebol". Posso gostar dos dois? de um só deles?
- "João, se não comeres a sopa tens castigo". O João come a sopa e tem castigo. O pai mentiu?
- "eu só digo mentiras". Será isso verdade?
- "ou gosto do Benfica ou gosto do Sporting". é uma disjunção?

  se traduzirmos por $Gostar\_Benfica \vee Gostar\_Sporting$, quais são as condições para acharmos esta frase verdade? falsa?

  se traduzirmos por $(Gostar\_Benfica \vee Gostar\_Sporting) \wedge \neg(Gostar\_Benfica \wedge Gostar\_Sporting)$, quais as são condições para acharmos que esta frase é verdade? falsa?