Teoria da Computação
Ficha de exercícios

Simão Melo de Sousa

Ano lectivo 2005/2006

1 Conjuntos, Relações, Ordens e Conjuntos ordenados

Exercício 1 *Considere o conjunto $\mathcal{S}al$ dos ordenados duma empresa X. Nesta empresa, os ordenados são compostos por duas partes: o salário S e o valor dos prémios P. Assim, um ordenado é um par (S, P) onde $S \in \mathbb{R}^+$ e $P \in \mathbb{R}^+$. Dois ordenados (a, b) e (c, d) são iguais quando os dois campos dos ordenados são iguais. Isto é: $(a, b) = (c, d) \triangleq (a = c \wedge b = d)$*

Determine (e justifique) se as relações binárias R_1, R_2, R_3 R_4e R_5 ($\subseteq \mathcal{S}al \times \mathcal{S}al$) seguintes são ordens largas:

1. $(a, c)R_1(b, d) \triangleq (a \leq b) \vee (c \leq d)$
2. $(a, c)R_2(b, d) \triangleq (a \leq b) \wedge (c \leq d)$
3. $(a, c)R_3(b, d) \triangleq (a < b) \vee ((a = b) \wedge (c \leq d))$
4. $(a, c)R_4(b, d) \triangleq (a + c) \leq (b + d)$
5. $(a, c)R_5(b, d) \triangleq (a \leq b) \vee (c \geq d)$

□

Exercício 2 *Sejam $\mathcal{P}ar$ o conjunto dos inteiros pares e $\mathcal{I}mpar$ o conjunto dos inteiros ímpares. Considere a relação binária R seguinte sobre $\mathbb{N}$:*

$$x \ R \ y \ \triangleq \begin{cases} x \ \in \mathcal{P}ar \ \wedge \ y \in \mathcal{P}ar \ \wedge \ x \geq y \\ x \ \in \mathcal{I}mpar \ \wedge \ y \in \mathcal{I}mpar \ \wedge \ x \leq y \\ x \ \in \mathcal{P}ar \ \wedge \ y \in \mathcal{I}mpar \end{cases}$$

1. *Demonstre que R é uma relação de ordem larga*

2. Será R total ou parcial? Justifique.

3. Dê o diagrama de Hasse (pelo menos um esboço) desta relação.

□

Exercício 3 *Seja $R \subseteq E \times E$ uma relação binária sobre o conjunto E, mostre que se $R^2 \subseteq R$ então R é transitiva.* □

Exercício 4 *Uma* pre-ordem *R sobre um conjunto E é uma relação binária transitiva sobre R (em particular $R \subseteq E \times E$). Demonstre que, neste caso, $Id_E \cup (R \cap R^{-1})$ é uma relação de equivalência.* □

Exercício 5

- *Apresenta os diagramas de Hasse de todas relações de ordem possíveis num conjunto de três elementos.*
- *Determine quais dessas ordens são reticulados.*

□

Exercício 6 *Definir o grafo da relação de ordem larga parcial R_1 associada ao diagrama de Hasse da figura 1. Desenha o diagrama de Hasse associado ao grafe da relação de ordem estrita parcial R_2 da figura 2.* □

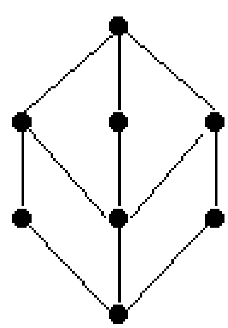

Figura 1: Diagrama de Hasse da relação de ordem larga parcial R_1

Exercício 7 (Relações de ordem) *Demonstre que as relações seguintes são ordens largas:*

- *a relação "maior ou igual" $\geq$ sobre os reais;*
- *a relação "é divisível por" $|$ sobre os inteiro naturais ($\forall a, b \in \mathbb{N}. a|b \triangleq \exists c. b = a.c$)*

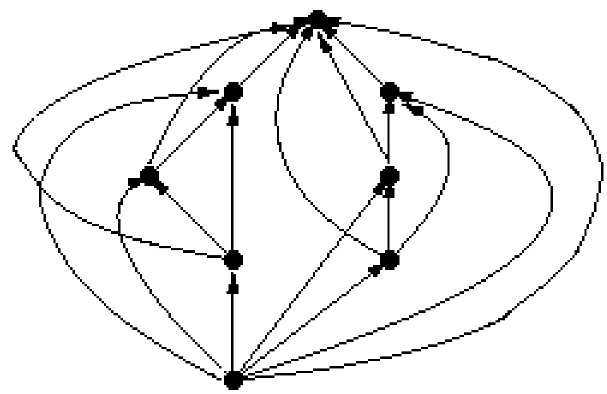

Figura 2: Grafo da relação de ordem estrita parcial R_2

- *a relação de inclusão sobre as partes dum conjunto C, tal que $\sharp(C) > 1$. Neste caso, o que acontece à ordem se $\sharp(C) \leq 1$?*

Serão essas ordens parciais ou totais? $\square$

Exercício 8 *Num monóide livre $A^\star$, a relação "prefixo" $\leq_{prefixo}$ é a relação definida da seguinte forma:*

Sejam $u = u_1 \dots u_n$ uma palavra de n letras e $v = v_1 \dots v_m$ uma palavra de m letras tais que $n \leq m$. u é prefixo de m, notado $u \leq_{prefixo} v$ se $\forall i \leq n, u_i = v_i$.

Demonstre que $\leq_{prefixo}$ é uma relação de ordem larga. $\square$

Exercício 9 *Sejam $(C_1, \leq_1)$ e $(C_2, \leq_2)$ dois conjuntos ordenados. O produto lexicográfico, designado por $(C_1 \times C_2, \leq_{1\times 2})$, é o conjunto ordenado onde $\leq_{1\times 2}$ é definido por $x_1 \leq_1 y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq_2 y_2)$. Mostre que o produto lexicográfico de ordens totais é uma ordem total.* $\square$

Exercício 10
- *Mostre que se um subconjunto C' de C tem um único elemento maximal então este elemento não é necessariamente o máximo de C';*
- *O que acontece se C for totalmente ordenado?*

$\square$

Exercício 11 *Seja C o conjunto $\{1; 2; 3; \dots; 20\}$ ordenado pela relação de divisibilidade.*

- *Defina o diagrama de Hasse associado;*
- *Sejam A, B, C, D e E os conjuntos seguintes $\{1; 2; 4; 8\}$, $\{2; 3; 5; 7\}$, $\{2; 3; 6; 9\}$, $\{1; 12\}$ e $\{3; 5; 8; 9\}$. Determine para cada um deles, caso existirem, os elementos seguintes: majorantes, minorantes, elementos máximos, mínimos, maximal, minimal, limite superior e finalmente limite inferior.*

$\square$

Exercício 12 *Considere o conjunto ordenado $(C, \leq)$ da figura 3. Define os majorantes,*

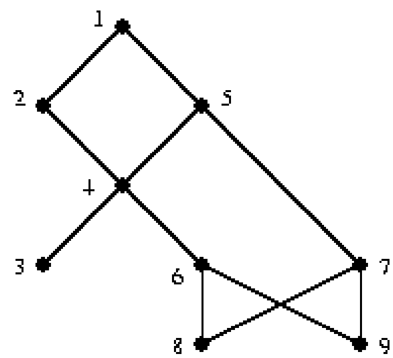

Figura 3: Diagrama de Hasse de $(C, \leq)$.

minorantes, elementos máximos, mínimos, maximal, minimal, limite superior e finalmente limite inferior dos subconjuntos:

- $\{2, 4, 5, 3, 6\}$
- $\{6, 7\}$
- $\{2, 4, 6, 9\}$

$\square$

2 Conjuntos Bem Ordenados e Indução Bem Fundada

Exercício 13 *Seja `f` a função OCaml seguinte:*

```
let rec f x =
   if (x<1)
     then 0
     else
       if (x=1)
         then 1
         else (f (x-2))*(f (x-1))/2
```

Demonstre, usando a indução bem fundada, que $\forall n \in \mathbb{N}.\ (f\ n)$ termina. $\square$

Exercício 14 *Diga, dos conjuntos ordenados seguintes, quais são os conjuntos ordenados bem fundados. No caso negativo apresenta uma justificação formal (um contra-exemplo por exemplo). Considere* $\leq$ *como a relação de ordem habitual e* $|$ *como a relação de divisibilidade (i.e.* $a|b \triangleq a$ *divide* b*);*

1. $(\mathbb{N}, \leq)$;
2. $(\mathbb{Z}, \leq)$;
3. $(\mathbb{N}, |)$;
4. $(\mathbb{R}, \leq)$;
5. $(\{2n \mid n \in \mathbb{N}^*\}, |)$
6. $(\{2^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}, |)$
7. $\forall C$ *conjunto,* $(\wp(C), \subseteq)$

$\square$

Exercício 15 *Sejam* $(A, \leq_A)$ *e* $(B, \leq_B)$ *dois conjuntos* ***ordenados*** *por ordens largas* ***totais*** *e* ***bem fundadas*** *(diz-se, neste caso, que* $\leq_A$ *e* $\leq_B$ *são boas ordens). Seja* $(A \times B, \leq^{\mathcal{L}})$ *o conjunto* $A \times B$ *ordenado pela ordem lexicográfica* $\leq^{\mathcal{L}}$ *i.e.*

$$(a, b) \leq^{\mathcal{L}} (c, d) \triangleq \begin{cases} (a <_A c) \\ (a = c) \wedge (b \leq_B d) \end{cases}$$

onde $(a <_A c) \triangleq (a \leq_A c) \wedge (a \neq c)$*. Demonstre que* $(A \times B, \leq^{\mathcal{L}})$ *é bem fundado.* $\square$

Exercício 16 *Sejam* $(A, \leq_A)$ *e* $(B, \leq_B)$ *dois conjuntos* ***ordenados bem fundados****. Seja* $(A \times B, \leq_{A\times B})$ *o conjunto* $A \times B$ *ordenado pela ordem produto* $\leq_{A\times B}$ *i.e.* $(a, b) \leq_{A\times B} (c, d) \triangleq ((a \leq_A c) \wedge (b \leq_B d))$*. Demonstre que* $(A \times B, \leq_{A\times B})$ *é igualmente bem fundado. Para tal considere a definição da noção de ordem bem fundada e verifique que* $\leq_{A\times B}$ *respeita bem esta definição (uma demonstração possível é proceder por contradição).* $\square$

Exercício 17 *Seja* `d` *a função OCaml seguinte:*

```
let rec d x y =
    if x < y then 0
    else if y = 0 then x
            else (d  (x-y) y) +1 ;;
```

1. *Diga,* ***brevemente****, o que calcula a função* `d`*.*
2. *Demonstre, por indução bem fundada, que a função* `d` *termina.*

$\square$

Exercício 18 *1. Mostre que* $\forall n \in \mathbb{N}.(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$

2. *Deduzir que qualquer inteiro* m *pode ser escrito como soma e diferença dos quadrados* $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ *para um determinado* n*. Isto é:*

$$\forall m \in \mathbb{N}.\exists n \in \mathbb{N}.\exists \epsilon_1, \ldots \epsilon_n \in \{-1, 1\}.m = \epsilon_1.1^2 + \epsilon_2.2^2 + \ldots + \epsilon_n.n^2$$

$\square$

Exercício 19 *Seja* $A^\star$ *o monóide livre gerado a partir do alfabeto* A*. Mostre que* $\forall u, v \in A^\star, u.v = v.u \longleftrightarrow \exists w \in A^\star.\exists p, q \in \mathbb{N}.u = w^p \wedge v = w^q$ $\square$

3 Reticulados, CPOs e Pontos Fixos

Exercício 20 *Seja* D *o conjunto das funções parciais de* $\mathbb{N}$ *para* $\mathbb{N}$*. Seja* fun *a função recursiva de* D *definida por*

$$\begin{aligned} fun \triangleq [f|\ & f(0) = 1, \\ & f(1) = 2, \\ & f(n+2) = f(n+1) + f(n)] \end{aligned}$$

1. *Define o operador de ponto fixo* $F_{fun}\ f\ x$ *associado à função* fun*.*

2. *Calcule* fun_0*,* fun_1*,* fun_2*,* fun_3 *e* fun_4*.*

$\square$

Exercício 21 *Seja* E *um conjunto, seja* $T = \wp(E \times E)$ *(conjunto das partes de* $E \times E$*) ordenado pela relação de inclusão (*$\subseteq$*), seja* R *uma relação binária sobre* E *e seja* f *a função de* $\wp(E \times E)$ *em* $\wp(E \times E)$ *definida por:* $f(X) = Id_E \cup R.X$*:*

1. *mostre que* f *é contínua;*

2. *mostre que o mais pequeno ponto fixo de* f *é* R^*

$\square$

Exercício 22 *Seja* E *o conjunto dos algarismos entre* 0 *e* 9 *utilizados num painel de publicidade com base em cristais líquidos assim como o algarismo "vazio". O conjunto* E *é apresentado na figura 4.*

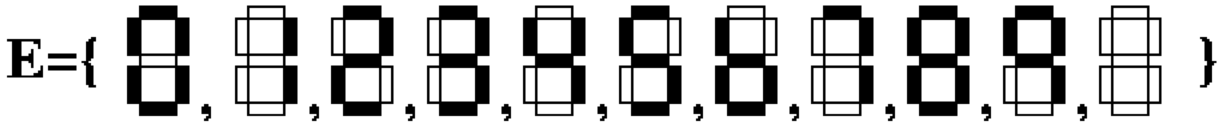

Figura 4: Conjunto E dos algarismos

Seja R a relação binária sobre E definida por:

$$a\,R\,b \triangleq \begin{cases} \textbf{se } a = b \\ \\ \textbf{ou se } b \textit{ obtido de } a \textit{ ligando pelo menosuma barra} \\ \qquad\quad \textit{do sistema de vizualização porcristais líquidos} \end{cases}$$

Assume que R é uma relação de ordem larga.

1. *Dê o diagrama de Hasse da relação R.*
2. *Mostre formalmente que (E, R) forma um reticulado.*

□

Exercício 23 *Considere os diagramas de Hasse de conjuntos ordenados da figura 5. Diga*

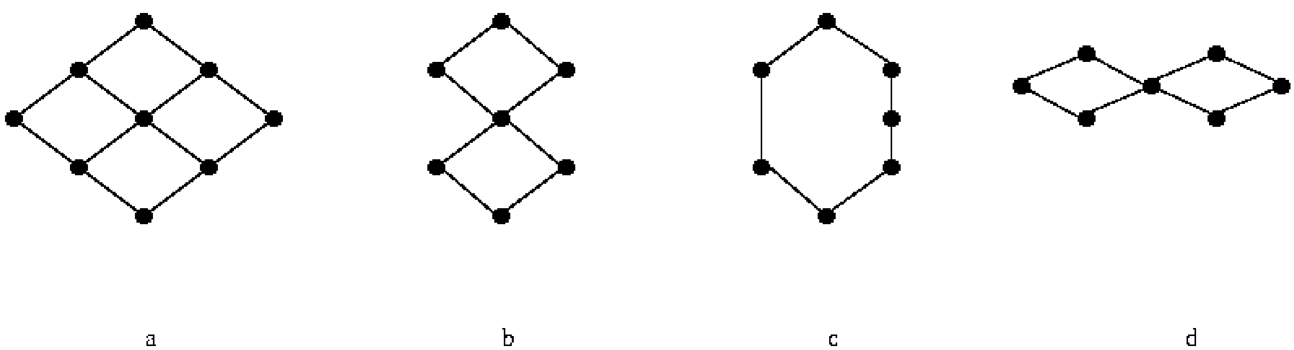

Figura 5: Diagramas de Hasse de conjuntos ordenados

(e justifique) desses conjuntos ordenados quais são reticulados ou não. □

Exercício 24 *Seja D o conjunto das funções parciais de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$. Seja fun a função recursiva de D definida por*

$$\begin{aligned} fun \triangleq [f|\ & f(0) = 2, \\ & f(1) = 5, \\ & f(n+2) = f(n+1) * f(n)] \end{aligned}$$

1. *Define o operador de ponto fixo $F_{fun}\ f\ x$ associado à função fun.*

2. *Calcule fun_0, fun_1, fun_2, fun_3 e fun_4.*

□

Exercício 25 *Mostrar que um conjunto ordenado $(C, \leq)$ é um reticulado se e só se qualquer subconjunto finito não vazio de C tem um limite superior e um limite inferior.* □

Exercício 26
- *Demonstre que o conjunto ordenado $(\mathbb{N}, |)$ é um reticulado. Determine, em particular, o que são as operações e constantes $\top, \bot, \sqcup$ e $\sqcap$;*
- *Será este reticulado distributivo? complementado?*

□

Exercício 27 *Dado um conjunto C, demonstre que o conjunto ordenado $(\wp(C), \subseteq)$ é um reticulado completo. O que são os elementos $\top$ e $\bot$?* □

Exercício 28 *Mostre que qualquer função contínua é monótona.* □

Exercício 29 *Seja f uma aplicação contínua dum reticulado completo $(C, \leq)$ para ele próprio. Seja $k = inf(\{f^n(\top) | n \in \mathbb{N}\})$*

- *Mostre que $f(k) \leq k$*
- *Mostre que, para todo o ponto fixo y de f, $y \leq k$;*
- *Mostre que $\{f(\top) | n \in \mathbb{N}\}$ é uma cadeia de C.*

□

Exercício 30 *Considere o conjunto $\wp(C \times C)$ ordenado pela relação de inclusão. Seja R uma relação binária sobre C e seja f a aplicação de $\wp(C \times C)$ para $\wp(C \times C)$ definida por $f(X) = Id_C \cup R.X$. Mostre que esta aplicação é contínua e que o seu mais pequeno ponto fixo é R^** □

4 Definições Indutivas

Exercício 31 *Demonstre por indução que $\forall n \in \mathbb{N}.\ (3^{3.n+2} + 2^{n+4})$ é divisível por 5.* □

Exercício 32 *Uma árvore binária é* equilibrada *se, para cada nodo, a diferença de altura entre a sub-árvore esquerda e a sub-árvore direita é no máximo* 1.

1. *Dar uma definição indutiva do conjunto AVL_A das árvores binárias equilibradas de elementos dum conjunto A.*

2. *Qual é o principio de indução associado a esta definição indutiva?*

3. *Define a função altura sobre as árvores binárias equilibradas que diga qual é o comprimento do maior ramo da árvore em parâmetro (considere que a altura da árvore vazia é 0 e que a altura da arvore que só tem um nodo é 1).*

4. *Define a função nodos sobre as árvores binárias equilibradas que devolve o número de nodos da árvore em parâmetro;*

5. *Demonstre por indução estrutural que* $\forall a \in AVL_A.\ altura(a) \leq nodos(a)$

$\square$

Exercício 33 *O objectivo deste exercício é a definição indutiva do conjunto das datas válidas. Uma data válida é um terno* (d, m, a) *onde* d *e* a *são inteiros que representam respectivamente o dia e o ano, e* m *uma palavra representando um mês (como a palavra "Fevereiro" que representa o mês de Fevereiro). Imagine que exista uma relação ternária* $val(d, m, a)$ *que seja verdade se o dia* d *é um dia possível para o mês* m *e o ano* a*. Por exemplo não temos* $val(29, Fevereiro, 2001)$ *porque* 2001 *não é um ano bissexto, também não temos* $val(31, Setembro, 2001)$ *nem* $val(0, Setembro, 2001)$ *porque Setembro só tem* 30 *dias e porque não existe o dia* 0.

1. *Defina indutivamente o conjunto* Mês *dos meses.*

2. *Defina indutivamente o conjunto* Data *das datas válidas.*

$\square$

Exercício 34 *Seja* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, a função recursiva definida por:*

$$f(m, n) \triangleq \begin{cases} n + 1 & se\ m = 0 \\ f(m - 1, 1) & se\ n = 0 \wedge m \neq 0 \\ f(m - 1, f(m, n - 1)) & se\ n > 0 \wedge m > 0 \end{cases}$$

- *demonstre por indução estrutural a propriedade:* $\forall k \in \mathbb{N},\ f(1, k) = k + 2$*;*

- *demonstre por indução que* $\forall k \in \mathbb{N},\ f(2, k) = 2 \times k + 3$.

$\square$

Exercício 35 *Explique brevemente a diferença entre a noção de função recursiva e a noção de função estruturalmente recursiva.* $\square$

Exercício 36 (Definições Indutivas) *Definir os seguintes conjuntos indutivos:*

1. *A parte* $\mathbb{N}_3$ *de* $\mathbb{N}$ *dos inteiros múltiplos de três*

2. *A parte L_A do monoide livre B^* (onde o alfabeto B é $A \cup \{'[',']',':'\}$) das listas de elementos de um conjunto A. Fornecer igualmente a definição constructiva do conjunto considerado.*

3. *A parte AB_A do monoide livre B^* (onde o alfabeto B é $A \cup \{'(',')',','\}$) das árvores de elementos de um conjunto A*

4. *A parte D do monoide livre A^* (onde o alfabeto A é $\{(,)\}$) das expressões bem "parenteseadas"(conhecida por* Linguagem de Dyck. *Por exemplo ()(()()), ()() e ((())) são palavras da linguagems de Dyck, mas ((), ()) e ())(não são palavras da linguagem.*

5. *A parte A^* do monoide livre A^* (sendo A um alfabeto qualquer)*

□

Exercício 37 (Definição construtiva de conjuntos indutivos) *Seja A um alfabeto, define-se $AB_{A,n}$, $(n \in \mathbb{N})$ por*

$$AB_{A,0} = \{\emptyset\} \tag{1}$$

$$AB_{A,n+1} = AB_{A,n} \cup \{(a, g, d) |\ a \in A \text{ e } g, d \in AB_{A,n}\} \tag{2}$$

1. *Mostrar que $AB_{A,\omega}(= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} AB_{A,n})$ é o conjunto AB_A.*

2. *Para $A = \{a, b, c\}$, exibir $AB_{A,2}$*

3. *Exibir uma árvore binária que não pertença a AB_A. Porque nunca será ela gerado por $AB_{A,\omega}$?*

□

Exercício 38 (Altura de elementos de conjuntos indutivos) *Qual é a altura de* 18 *nos conjuntos indutivo dos inteiros, dos inteiros pares, dos inteiros múltiplos de três?* □

Exercício 39 (Indução sobre os naturais) *Seja o polinómio $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$*

1. *Definir $p(x + 1) - p(x)$*

2. *Mostrar que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $p(x) \in \mathbb{N}$*

□

Exercício 40 (Demonstrações na linguagem de Dyck) *Mostrar que qualquer palavra da linguagem de Dyck tem tantas parêntesis esquerdas como parêntesis direitas.* □

Exercício 41 (Terão os princípios de indução sentido?) *Encontrar o erro no raciocínio seguinte:*

"Em qualquer grupo de pessoas, todas as pessoas têm a mesma idade"

Demonstração: *Por indução sobre o número de pessoas no grupo (em $\mathbb{N}^*$).*

Caso base *num grupo de uma pessoa, todas as pessoas tem a mesma idade, trivialmente.*

Caso do passo indutivo *Hipótese de indução: todas as pessoas tem a mesma idade em qualquer grupo de n pessoas.*
Seja G um grupo de $n+1$ pessoas, sejam G_1 e G_2 os grupos das n primeiras e últimas pessoas de G. Todas as pessoas de G_1 e de G_2 têm a mesma idade, por hipótese. Logo a primeira pessoa de G_1 tem a mesma idade do que a segunda pessoa de G_1, essa segunda pessoa de G_1 é a primeira pessoa de G_2 e tem a mesma idade do que a última de G_2, logo a primeira pessoa de G ($\in G_1, \notin G_2$) tem a mesma idade do que a última pessoa de G ($\in G_2, \notin G_1$). Logo, todas as pessoas de G têm a mesma idade.

Conclusão *Fica então demonstrado que em qualquer grupo de pessoas, todas as pessoas têm a mesma idade*

□

Exercício 42 (Funções definidas em conjuntos indutivos) *1. Definir a função $subtermo(t)$ que devolve o conjuntos dos subtermos de um termo $t \in T$*

2. *Definir a função $altura(a)$ que devolve a altura de uma árvore $a \in AB_A$*
3. *Definir a função $nós(a)$ que devolve o número de nós da árvore parâmetro $a \in AB_A$*
4. *Definir a função $folhas(a)$ que devolve o número de folhas da árvore parâmetro $a \in AB_A$*
5. *Definir a função $pot(x, n)$ que devolve x^n ($n \in \mathbb{N}$)*
6. *Definir a função $pertence(x, l)$ que devolve 1 se $x(\in A)$ pertence a $l(\in L_A)$, 0 senão*
7. *Definir a função $comprimento(l)$ que devolve o tamanho da lista $l(\in L_A)$*
8. *Definir a função $inverte(l)$ que devolve a lista inversa a lista $l(\in L_A)$ (a lista em que os elementos estão em ordem inversa em comparação a l)*
9. *Definir a função $concat(l_1, l_2)$ que concatenas a lista l_2 a lista l_1 ($l_1, l_2 \in L_A$)*

□

Exercício 43 (Árvores Binárias Estritas) *Uma árvore binária é estrita se não tiver um nó com um só filho e se não for a árvore vazia.*

1. *Dar a definição indutiva de ABs_A, o conjunto das árvores binárias estritas.*

2. *Mostrar que em ABs_A se tem $n(x) = 2 * f(x) - 1$ em que x é um elemento de ABs_A, n a função que devolve o número de nós de uma árvore, e f a função que devolve o número de folhas de uma árvore.*

□

Exercício 44 (Linguagem de termos e conjuntos indutivos) *a) Definir a linguagem T de termos baseada no alfabeto $F = F_0 \cup F_2$ onde $F_0 = \{c\}$ e $F_2 = \{f\}$.*

b) Dado a interpretação h em $\mathbb{N}$ seguinte,

$$h(c) = 1 \tag{3}$$
$$h_f(n, m) = n + m \tag{4}$$

que conjunto X é definido por $X = \{h^*(t) |\ t \in T\}$?

c) Será a definição de X, correspondente a T, ambígua?

□

Exercício 45 (Definições de conjuntos indutivos não ambíguas a partir de funções indutivas) *Seja $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}/\{0\}$ Seja a definição seguinte de $modulo(n, m)$ no conjunto indutivo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ por*

$$modulo(n, m) = \begin{cases} n & se\ n < m \\ modulo((n - m), m) & senão \end{cases}$$

Esta definição define modulo como uma função apesar de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ ser definido ambiguamente. Extrair uma definição não ambígua de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ que corresponde a função modulo. □

Exercício 46 (Definições indutivas parametrizadas)

- *Definir $maxelem(a)$ e $minelem(a)$, $a \in AB_A$, as funções que devolvem o maior e menor elemento ($\in A$) da árvore a*

- *Definir o conjunto das árvores ABo_A das árvores ordenadas*

- *Provar que o percurso infixo de uma árvore ordenada a devolve sempre a lista crescente dos elementos de a*

□

5 Dedução Natural

Exercício 47 *Demonstre, em dedução natural, as seguintes tautologias:*

- $((P \vee Q) \wedge R) \rightarrow ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$
- $((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow ((\neg R \wedge P) \rightarrow \neg Q)$
- $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D)) \rightarrow (A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D)$
- $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow ((\neg R \wedge P) \rightarrow \neg Q)$
- $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B))$

$\square$

6 Cálculo λ

Exercício 48 *Um termo λ é $\beta-$fortemente normalizável quando todas reduções β conduzem a uma forma normal (i.e. não existe nenhuma possibilidade de haver uma sequência infinita de redução β). Serão os seguintes termos $\beta-$fortemente normalizável? No caso positivo, apresente a forma normal, no caso negativo justifique.*

- $(\lambda x.(\lambda y.y\,x)z)v$
- $(\lambda u.y)((\lambda z.(z\,z))(\lambda x.(x\,x)))$

$\square$

Exercício 49 *O combinador $Y \triangleq \lambda f.((\lambda x.f(x\,x))(\lambda x.f(x\,x)))$ pertence a família dos combinadores de* ponto fixo. *De facto $\forall f \in \Lambda.\,(Y f) = f(Y f)$. O nome desta família liga os seus elementos a noção de ponto fixo. Comente, exemplifique e justifique esta afirmação. Procura por exemplo comparar Y ao operador de ponto fixo F_f.*

$\square$

Exercício 50 *Assuma que, no sistema numérico de Church, as funções if, is_one is_zero, pred, succ e times estejam definidas. Defina a função recursiva ocaml seguinte (utilize o combinador Y).*

```
let rec f x =
   if (x<1)
     then 0
     else
       if (x=1)
         then 1
         else (f (x-2))*(f (x-1))
```

□

Exercício 51 *Assuma que, no sistema numérico de Church, as funções if, is_one is_zero, pred, succ, times e div2 estejam definidas:*

1. *defina a função recursiva ocaml seguinte (utilize o combinador Y)*

   ```
   let rec f x =
      if (x<1)
        then 0
        else
          if (x=1)
            then 1
            else (f (x-2))*(f (x-1))/2
   ```

2. *dê o termo λ que no sistema numérico de Church codifica o inteiro 3;*

3. *reduza $(f\ 3)$*

□

Exercício 52 *Se considerarmos os termos λ como programas, qual é a importância do teorema de Confluência quando relacionada com a noção de execução?* □

Exercício 53 *Assuma que, no sistema numérico de Church, as funções if, is_one is_zero, pred, succ, times e div2 estejam definidas:*

1. *defina a função recursiva seguinte (utilize o combinador Y)*

   ```
   let rec f x =
      if (x<1)
        then 0
        else
          if (x=1)
            then 1
            else (f (x-2))*(f (x-1))/2
   ```

2. *dê o termo λ que no sistema numérico de Church codifica o inteiro 3;*

3. *reduza* $(f\ 3)$

$\square$

Exercício 54 *Terão os seguintes termos uma forma normal? No caso positivo, apresente a forma normal, no caso negativo justifique.*

1. $(\lambda x.(x\,x))(\lambda x.(x\,x))$
2. $((\lambda x\,y\,z.\ x(y\,z))(\lambda u\,v.(u(u\,v))))(\lambda u\,v.(u(u\,v)))$

$\square$

Exercício 55 *Diga, no sistema numérico de Church, o que calcula o seguinte termo* λ f*:*

$$f \triangleq \lambda a\,b\,c.\ a(b\,c)$$

Sugestão:

1. *experimenta reduzir a aplicação de* f *aos inteiros de Church que codificam 2 e 3 (respectivamente* $\lambda f x.f(f x)$ *e* $\lambda f x.f(f(f x))$*);*
2. *depois de determinada a* β*-forma normal, diga que inteiro esta codifica. Conclua.*

$\square$